МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТУЛЬСКИЙ ФИЛИАЛ
(Тульский филиал РГТЭУ)

Кафедра общих математических и естественнонаучных дисциплин

Одобрено УМС ТФ РГТЭУ
Протокол №
« » 2011 г.
Председатель И.Н. Яшина
____

Юдин Сергей Владимирович

Методические указания по работе с программой «MAXIMA»

Для специальностей: 080105 «ФИНАНСЫ И КРЕДИТ»

Рекомендовано кафедрой:
Протокол № 9
«27» января 2011 г.
Зав. кафедрой В.Г. Степанов

Тула 2011 г.

УДК 51:51-37:338(075.8)

Юдин Сергей Владимирович – доктор технических наук, доцент по кафедре ЭВМ, профессор кафедры общих математических и естественнонаучных дисциплин Тульского филиала Российского государственного торгово-экономического университета, член-корреспондент Академии проблем качества

Юдин С.В.

MAXIMA: методические указания по работе с программой. - ТФ РГТЭУ, 2010.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Свободное программное обеспечение

Свободное ПО (Free Software) — программы для ЭВМ, которые распространяются на условиях, предоставляющих пользователям четыре ключевые свободы (права):

1 - свободное использование программного обеспечения в любые целях;

2 - свободное изучение и адаптация ПО к нуждам пользователя(ей) при условии открытого доступа к исходному коду программы;

3 - свободное распространение программного обеспечения (за деньги или безвозмездно);

4 - свободное усовершенствование и публикация ПО, включая распространение усовершенствованных версий, при условии открытого доступа к исходному коду программы.

Каждый пользователь свободной программы, в отличие от несвободной (проприетарной), является полноценным владельцем программы (обладает неисключительными авторскими имущественными правами на нее) и не зависит от воли разработчика программы или правообладателя.

Важнейшим следствием прав (2) и (4) является распространение свободной программы только при открытом доступе к её исходному коду.

Подобные программы распространяются под лицензией GNU General Public License, которая и описывает приведенные выше свободы.

Свободное ПО не означает, что оно является бесплатным. В случае продажи копии программы продавец, как правило, предоставляет ряд дополнительных услуг, которые, собственно, и оплачиваются (не считая стоимости изготовления и доставки копии покупателю). Если же программа пользователем самостоятельно скопирована, то она обойдется ему бесплатно, но никакие дополнительные услуги ему оказаны не будут.

Пользователь программного обеспечения самостоятельно решает, какие программы он будет использовать: коммерческие или свободно распространяемые.

Каждый вид ПО имеет свои достоинства и недостатки. Рассмотрим основные виды программных средств, не претендуя на полноту обзора.

Начнем с важнейшей части любого компьютера – операционной системы (ОС). Почему автор говорит об ОС, а не о процессоре, материнской плате и т.п.? С нашей точки зрения рядовому пользователю все это, по большому счету, безразлично. Все современные компьютеры способны выполнять все задачи, возникающие в процессе работы и учебы. Еще несколько лет тому назад компьютером пользовались, в основном, специалисты в области информационных технологий (ИТ), а прочие использовали эту технику только для ввода данных, набора текстов. Всегда были исключения – геймеры, фанаты-программисты и им подобные (не следует считать, что автор относится к ним с предубеждением, он доцент по кафедре ЭВМ и сам был таким). Владельцы ПК хвастались друг перед другом мощностью процессоров и видеокарт, сравнивали их возможности и постоянно производили модернизацию (апгрейд) техники.

Сейчас этот бум спал. На первый план вышли соображения удобства пользования, простота работы, доступность информационных технологий «чайнику».

С точки зрения автора, обычному пользователю и не надо знать, что там внутри. Важны три основных условия:

1 – возможность выполнения всех задач, как в работе, так и в учебе;

2 – простота использования;

3 – минимальные требования к общей подготовке.

Как уже отмечено выше, все современные компьютеры, как стационарные (десктопы), так и переносные (лэптопы или ноутбуки) способны выполнять все основные задачи, за исключением, быть может, некоторых специфических, таких как исполнение последних компьютерных игр, обработки видеосигнала в реальном времени и т.п. Но эти задачи не являются теми, которые подавляющее большинство пользователей решают в процессе своей работы или учебы. Таким образом, первое условие можно считать выполненным всегда.

Для работы на ПК необходима специальная программа-посредник, которая должна переводить команды пользователя в вид, понятный исполнителю-компьютеру. В качестве такого посредника выступает операционная система.

В России широкое распространение получили следующие операционные системы:

1 – коммерческая ОС семейства Microsoft Windows корпорации Microsoft;

2 – множество клонов открытой ОС семейства Linux;

3 – специфическая Mac OS (используется только на компьютерах семейства Apple Macintosh) .

Операционная система Microsoft Windows лучше всех других известна в России. Это можно объяснить двумя факторами. Во-первых, дружественность интерфейса, простота работы и настройки, отсутствие требований к специальным знаниям. Во-вторых, большое количество пиратских копий, доступных до сих пор на каждом углу.

Открытые ОС семейства Linux, как правило, используют люди с высокой квалификацией в области системного программирования. Если Вам необходимо достичь высочайшей надежности, максимальной производительности, полной безопасности, то Ваша ОС – Linux.

Помимо этого, практически все пакеты с ОС Linux поставляются с огромным количеством прикладных программ. Как правило, они имеют в своем составе офисные пакеты, графические редакторы, музыкальные и видеопроигрыватели и т.д. и т.п. Нет необходимости искать и покупать что-то, чего нет в основной поставке. Кроме этого, каждая версия ОС Linux связана со своим депозитарием, в котором находится огромное количество бесплатных программ любой направленности.

Совершено уникальная особенность ОС Linux – возможность создания и использования полноценной системы, которая загружается и работает без установки – непосредственно с компакт-диска. При этом имеется возможность чтения и записи на другие носители информации, работы со всеми пакетами программ, записанными на CD. Такие системы носят название LiveCD.

Операционные системы дают возможность пользователям общения с ПК, а решать задачи приходится с помощью разнообразного специализированного ПО.

Рассмотрим некоторые программы, которые наиболее часто используют студенты, аспиранты и преподаватели ВУЗов.

В первую очередь, нам нужны офисные пакеты программ. Ведь каждый из нас сталкивается с необходимостью написания отчетов (для этого нужен текстовый редактор), содержащие, зачастую, таблицы и графики, составленные по данным этих таблиц (для этого нужны табличные процессоры, обладающие возможностью упорядочивать и обрабатывать данные, строить различные диаграммы и графики). Часто возникает необходимость публичной презентации своих достижений (для составления визуального отображения целесообразно использовать слайды, каковые могут быть изготовлены в редакторе презентаций).

Как правило, все эти функции собраны в один пакет программ.

Существует несколько конкурирующих пакетов. Мы кратко рассмотрим только два из них.

Первый, это коммерческий пакет Microsoft Office корпорации Microsoft. В настоящее время актуальна версия Microsoft Office 2007. Осенью 2008 г. автор приобрел версию Microsoft Office 2007 Home and Student в рамках рекламной акции (лицензия на три компьютера за 1990 р.) и теперь этот пакет установлен на ПК автора, ноутбуке его дочери-студентки и ноутбуке сына-преподавателя. Такая цена может считаться оправданной в условиях России.

Этот пакет содержит текстовый редактор Microsoft Office Word 2007, электронные таблицы Microsoft Office Excel 2007, редактор презентаций Microsoft Office PowerPoint 2007, электронная записная книжка Microsoft Office OneNote 2007. По функциональности этот пакет превосходит старые (MS Office XP, MS Office 2003). Кардинально переработанный интерфейс не вызывает особых проблем и позволяет быстро производить необходимые действия.

Второй пакет – это офисный пакет, разработанный и распространяемый на основе открытой лицензии GNU General Public License: OpenOffice.org. В настоящее время актуальна версия 3.0.

Офисный пакет OpenOffice.org содержит:

1 – текстовый редактор OpenOffice.org Writer;

2 – электронные таблицы OpenOffice.org Calc;

3 – редактор презентаций OpenOffice.org Impress;

4 – графический редактор OpenOffice.org Draw.

Можно утверждать, что этот пакет является полноценной заменой Microsoft Office. С его помощью можно читать, редактировать и сохранять документы в форматах Microsoft Office, своих собственных форматах (что предпочтительнее). В качестве недостатков можно отметить, что набирать формулы в редакторе OpenOffice.org Writer сложнее, чем в Microsoft Office Word, а электронные таблицы OpenOffice.org Calc не позволяют решать задачи нелинейного программирования, в отличие от Microsoft Office Excel. В них также отсутствуют богатейшие возможности Microsoft Office Excel и Gnumeric по статистическому анализу данных.

Помимо операционной системы и офисного пакета пользователю, как правило, необходимы другие программы. Мы рассмотрим те из них, которые могут пригодиться в учебе и работе студентам, аспирантам и преподавателям, чья специальность связана с применением математических методов в экономике.

В первую очередь, необходима программа, позволяющая не только проводить математические расчеты, но и помогать в изучении общих математических методов. Имеется множество разных программ.

К коммерческим относятся такие как Mapple, Mathematica, MathCad, MathLab. Это очень мощные средства, позволяющие решить практически любую задачу. Все они имеют возможность символьных преобразований. Иначе говоря, можно решить задачу не только численно, как к этому привыкли школьники и студенты за время изучения курса «Информатика», но и в обычном символьном виде. С точки зрения автора, наиболее удачный интерфейс разработан для программы MathCad. Если же говорить о мощности и универсальности – то это программа Maple. С точки зрения решаемых в экономике задач любая из этих программ позволит пользователю добиться поставленных целей.

Недостаток этих программ в одном – высокая цена.

Среди свободного ПО можно отметить упомянутый выше пакет Maxima. Недостаток – не очень красивый интерфейс.

Указанные математические пакеты являются универсальными. Тем не менее, имеется ряд задач, таких как проведение статистического анализа, для решения которых лучше подходят специализированные программы.

Широко известны коммерческие программы статистического анализа Statistica и SPSS. Они позволяют легко и просто решать сложнейшие статистические задачи, предоставляют великолепный графический интерфейс. Недостаток, опять-таки, один – высокая цена. Нет, для крупного и даже среднего предприятия, это не так много, но для студента, аспиранта и преподавателя ВУЗа 40000…60000 руб. многовато.

Имеется несколько хороших программ, распространяющихся свободно. Среди них стоит отметить программу Gretl. Она позволяет решать все те задачи, которые решают и коммерческие программы. Недостатков у нее два: более бедный интерфейс и отсутствие русифицированной версии. Так что необходимо знание английского языка на уровне твердой школьной четверки.

В целом, функциональность свободного ПО, как правило, не уступает функциональности коммерческого ПО. Разница только в удобстве и красоте интерфейса. Иногда коммерческие программы обладают большей функциональностью, но для целей обучения это не имеет значения.

Что касается надежности, то коммерческие программы не всегда отличаются в лучшую сторону. Любой товар должен обладать определенными потребительскими свойствами, быть безопасным. Производитель несет ответственность за брак и убытки, понесенные потребителем вследствие, например, возгорания телевизора, отравления пищевыми продуктами и т.д. В то же время производители массовых программных продуктов не несут никакой ответственности за брак. Во всех лицензионных соглашениях фигурирует оборот «as is». Иначе говоря, программа берется в том виде, в каком она поставляется, производитель не отвечает ни за какие последствия, возникшие вследствие использования ее, даже если в процессе работы программы будут разрушены данные, с которыми эта программа не должна была работать, не говоря уже о ее собственных базах данных.

С нашей точки зрения, здесь происходит нарушение прав потребителей. Их *никогда* полностью не информируют о всех свойствах ПО, производители *никогда* не берут на себя ответственность ни за правильное функционирование программ, ни за ущерб, нанесенный ПО во время эксплуатации.

Техническая поддержка, которую обеспечивают поставщики коммерческого ПО, заключается только в том, что Вам помогут разрешить те проблемы, которые любой грамотный пользователь решит самостоятельно, быть может, потратит 20…30 минут. Если же возникает проблема несовместимости с другими программами, будет обнаружена ошибка в самой программе, в частности, Вы выйдете за пределы области применимости тех методов, которые были использованы при разработке алгоритма, то помощи ждать бесполезно. Более того, Вас же и обвинят в том, что Вы невнимательно прочитали лицензионное соглашение (кстати, ни в лицензионных соглашениях, ни в описаниях программ нет никаких сведений об области применимости алгоритмов). В идеале, для работы любой коммерческой программы требуется отдельный компьютер, на котором установлена свежая операционная система (имеется в виду, что ранее там ни одна прикладная программа не была установлена). Естественно, что такого не может быть ни у одного пользователя.

Что касается свободного ПО, то Вам предоставляется доступ к исходным текстам и документации, по которым можно определить ограничения и разного рода опасности. Это, однако, требует высокой квалификации.

Рассмотрим математический пакет Maxima.

2. Математический пакет Maxima

Пакет предназначен для проведения любых математических вычислений, как символьных, так и численных.

На момент написания данного руководства автор имел следующую актуальную версию для MS Windows: Maxima 5.12.0.a с графической оболочкой wxMaxima 0.7.2.

Установка программы начинается с выбора языка установки (рис. 1).

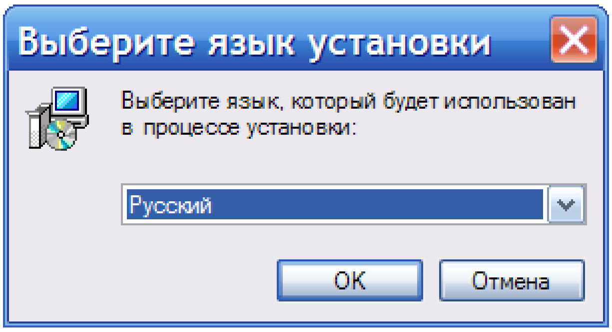


Рис. 1. Выбор языка установки

После выбора языка появится информационное сообщение (рис. 2), лицензионное сообщение (рис. 3) и предупреждающее сообщение (рис. 4).

Дальнейший ход установки представлен на рис. 5…рис. 12.

После завершения установки можно начинать работу с программой Maxima. Автор рекомендует использовать графический интерфейс wxMaxima, как наиболее удобный для начинающих (см. рис. 13).

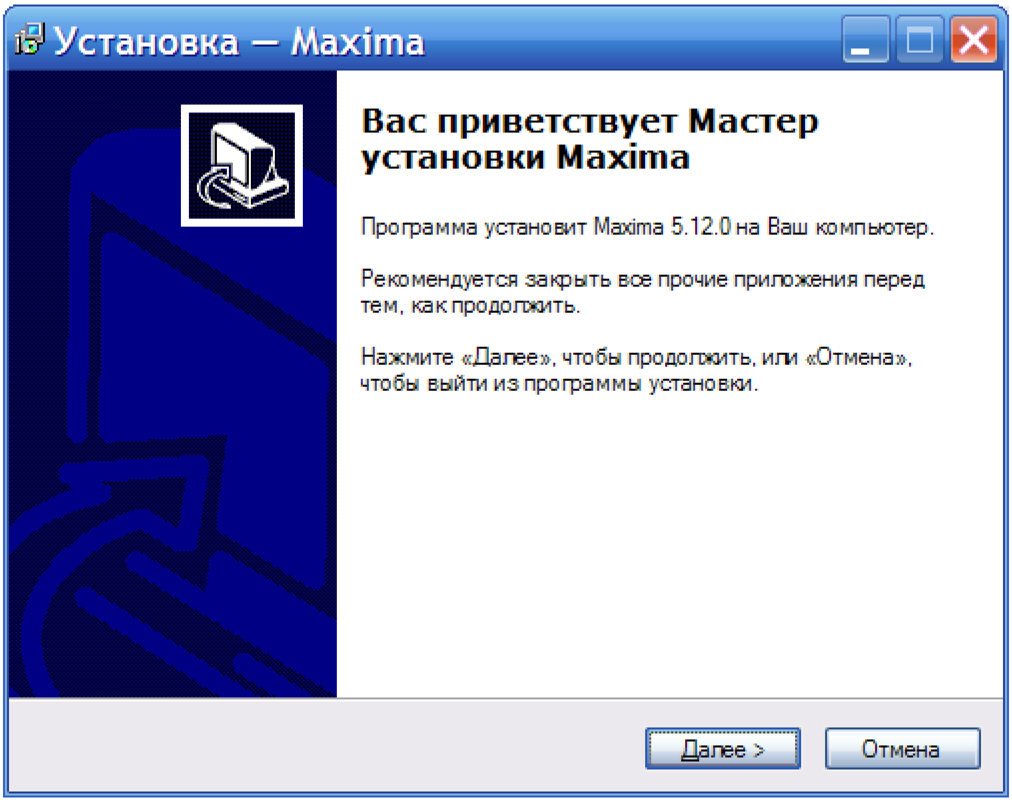


Рис. 2. Информационное сообщение

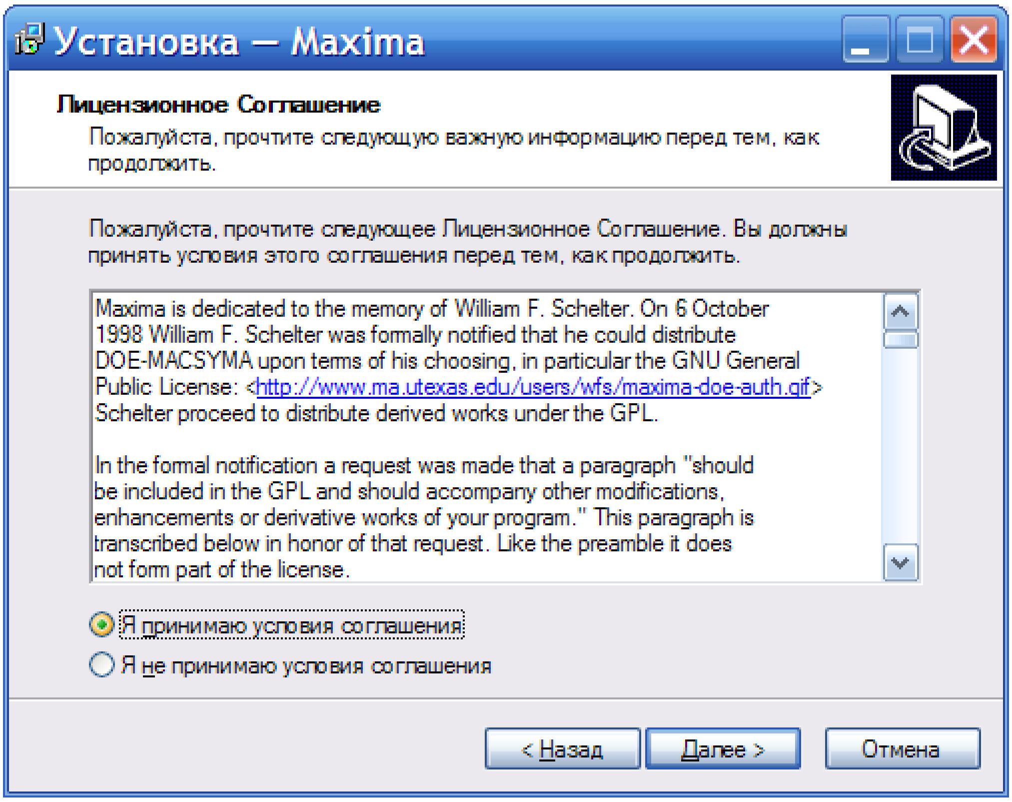


Рис. 3. Лицензионное сообщение

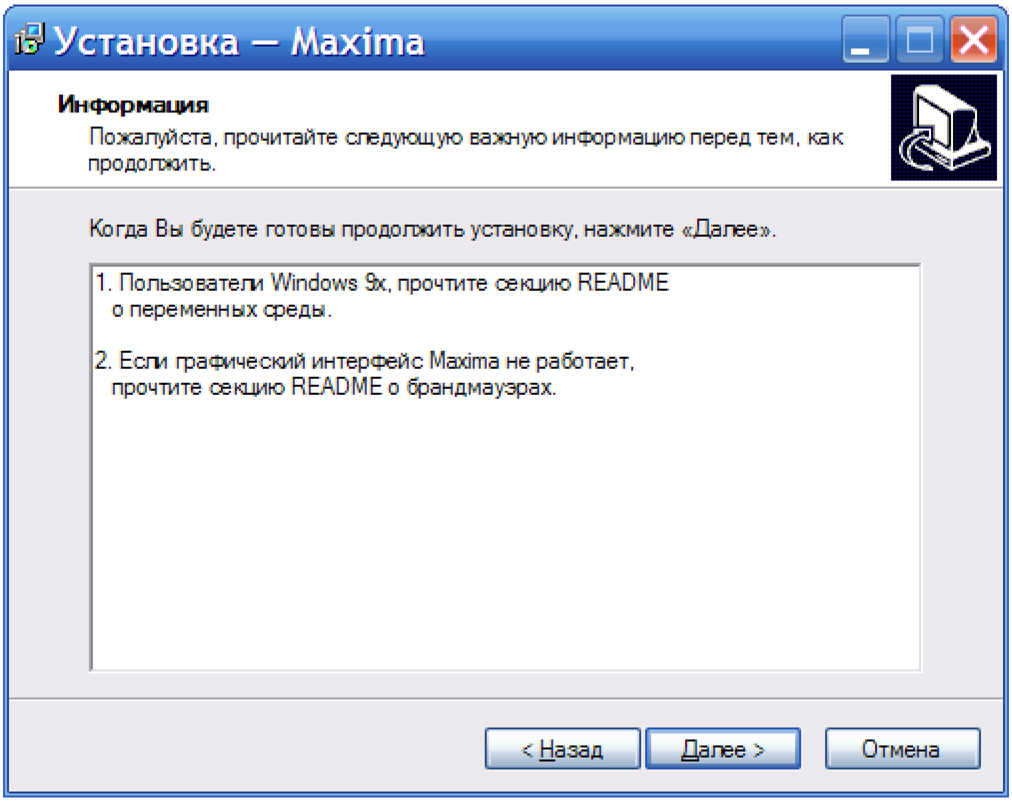


Рис. 4. Предупреждающая информация

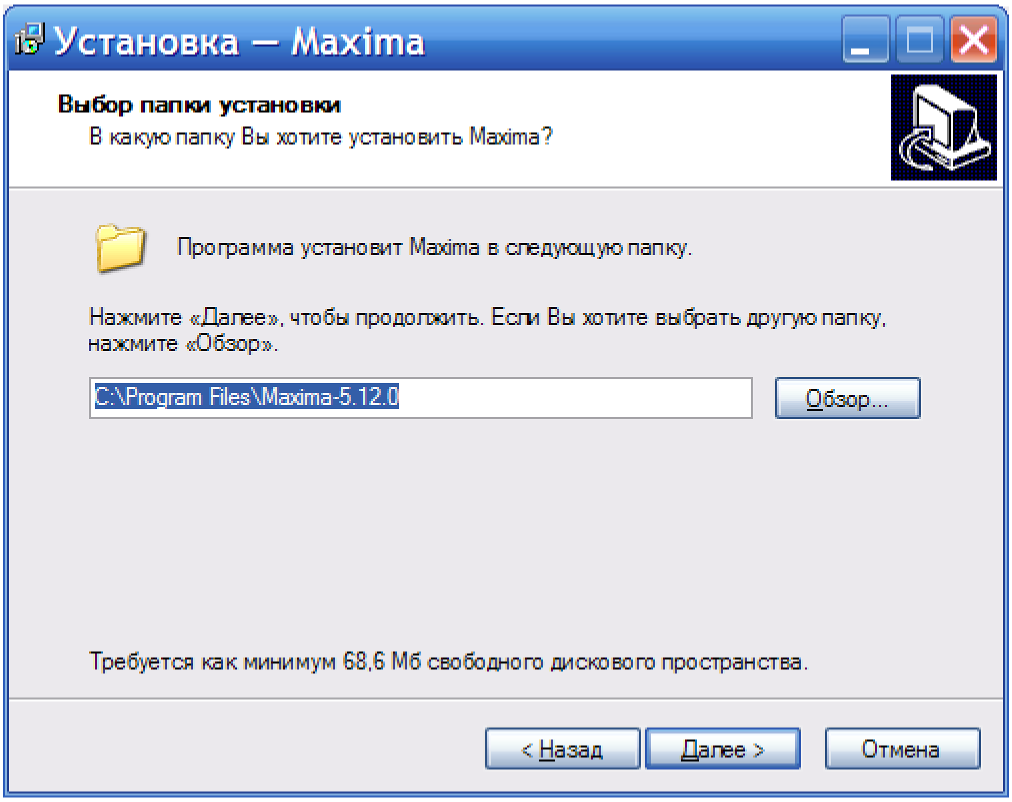


Рис. 5. Выбор папки установки программы

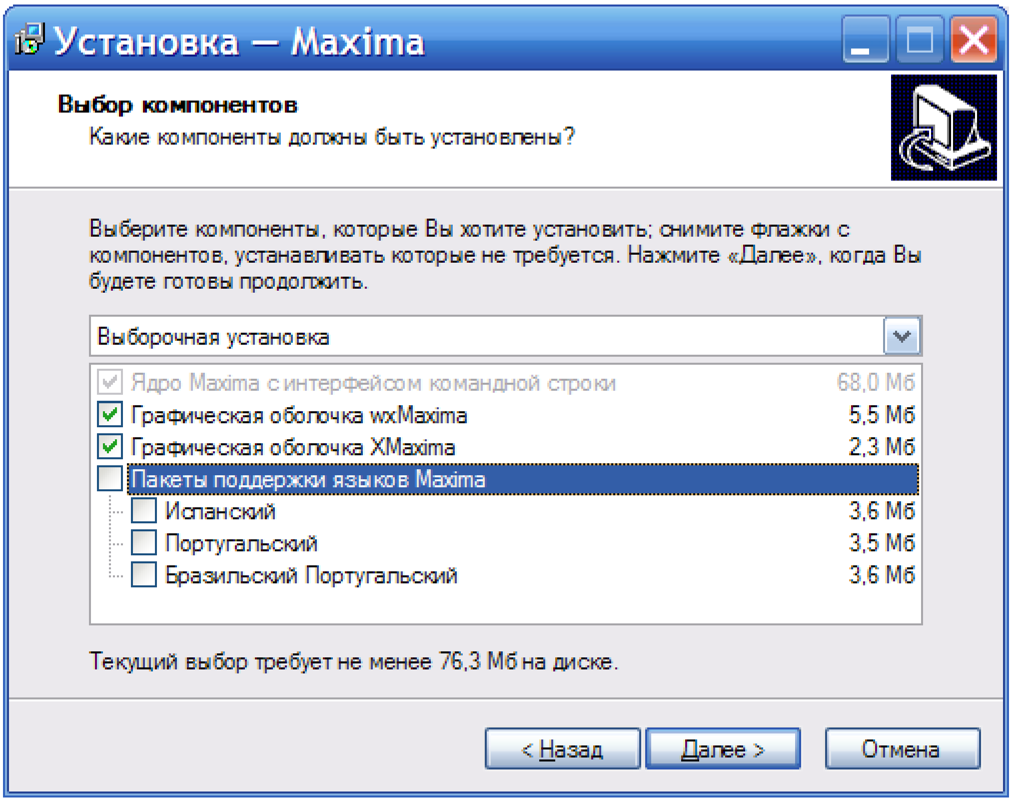


Рис. 6. Выбор компонентов программы (дополнительные языки устанавливать не имеет смысла)

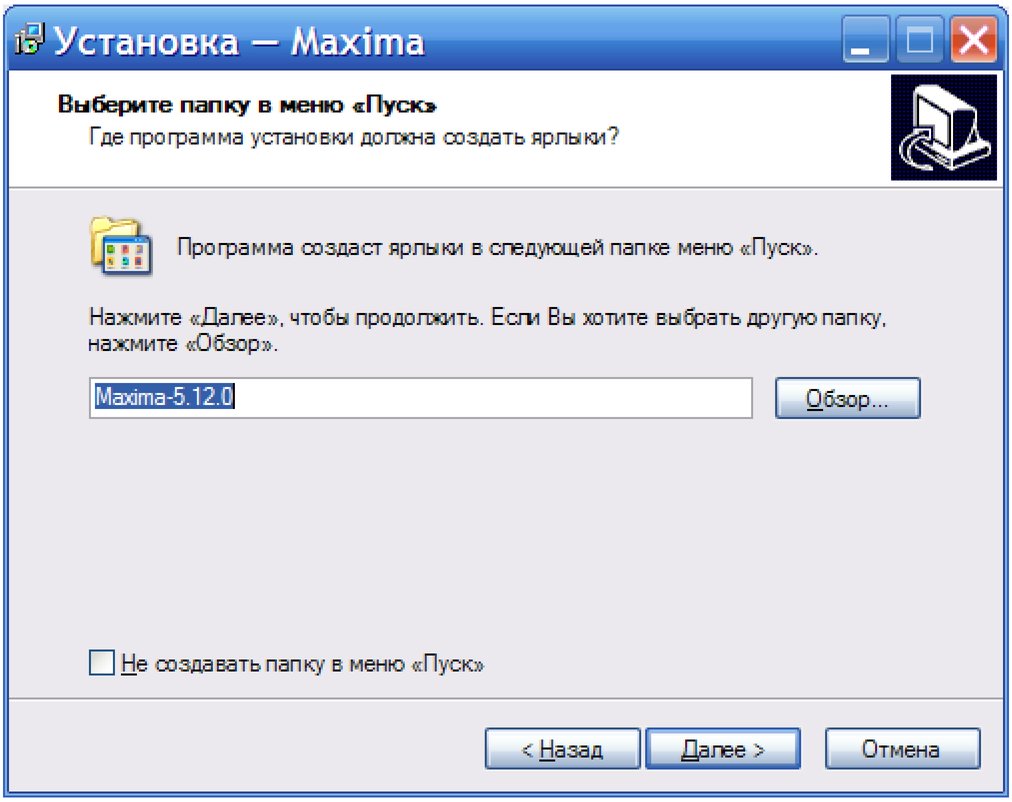


Рис. 7. Выбор папки в меню «Пуск»

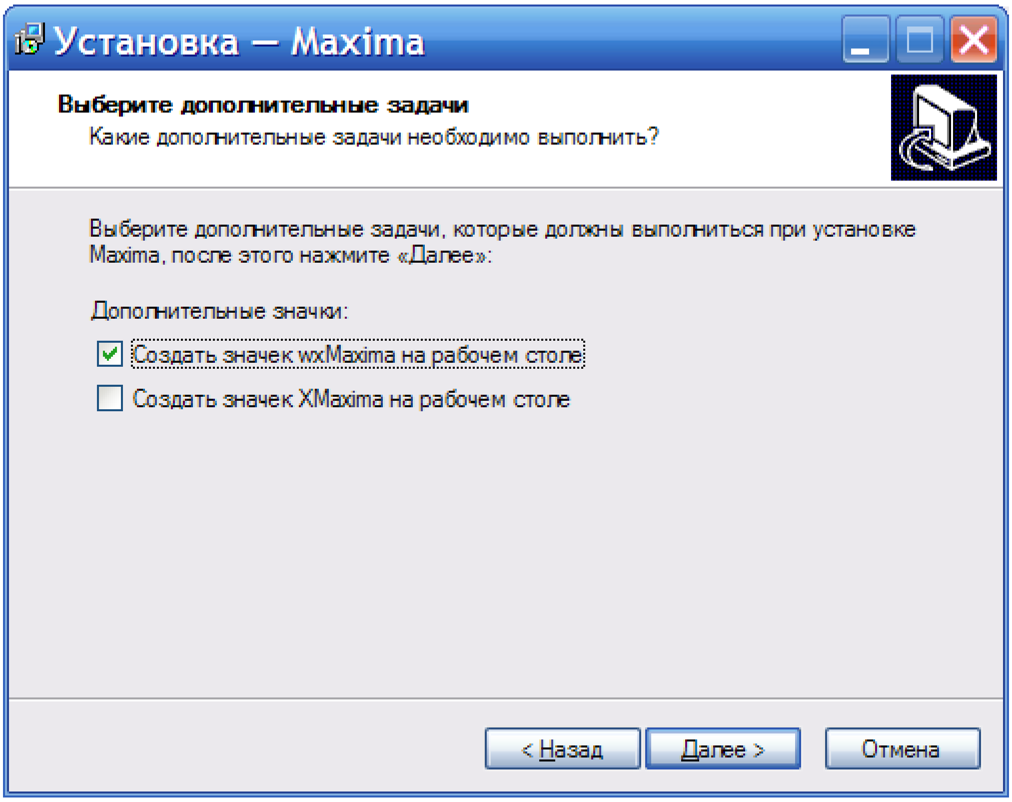


Рис. 8. Установка дополнительных значков

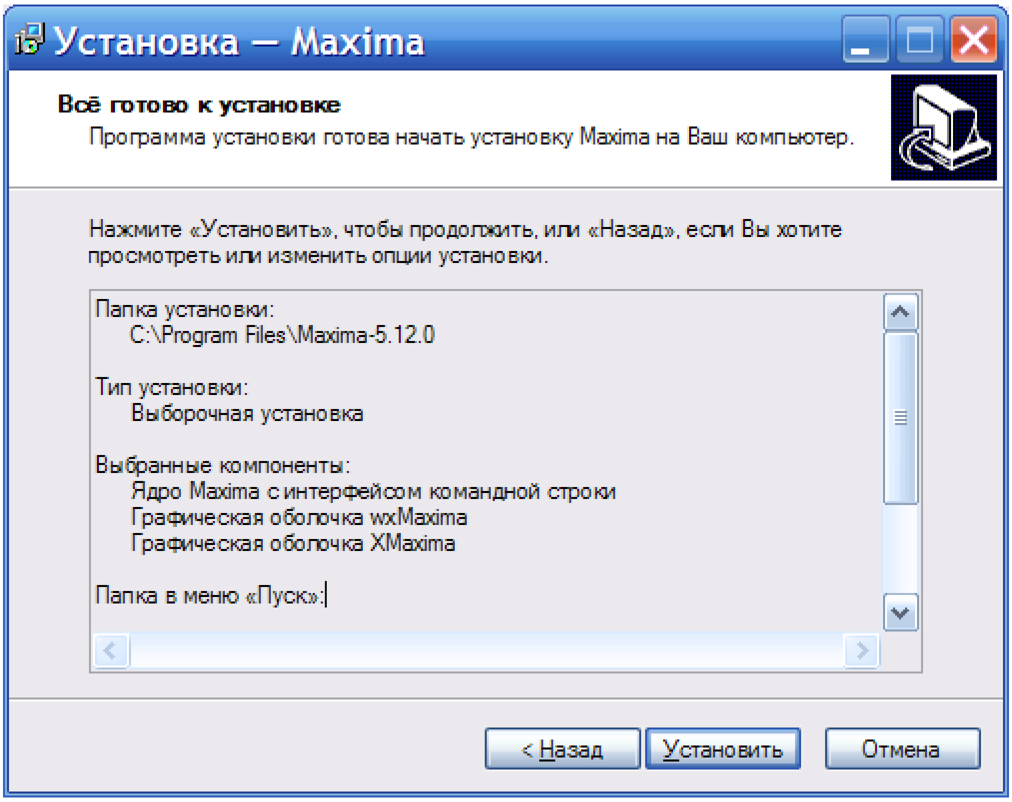


Рис. 9. Информация о готовности начать установку

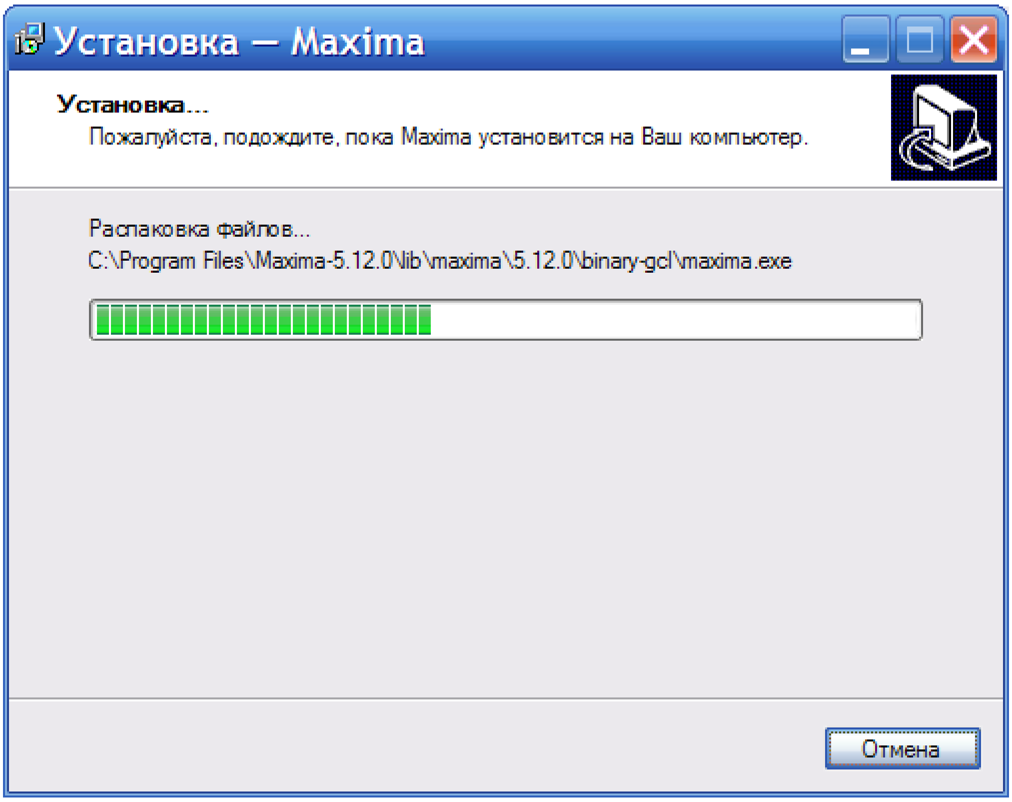


Рис. 10. Индикатор хода установки

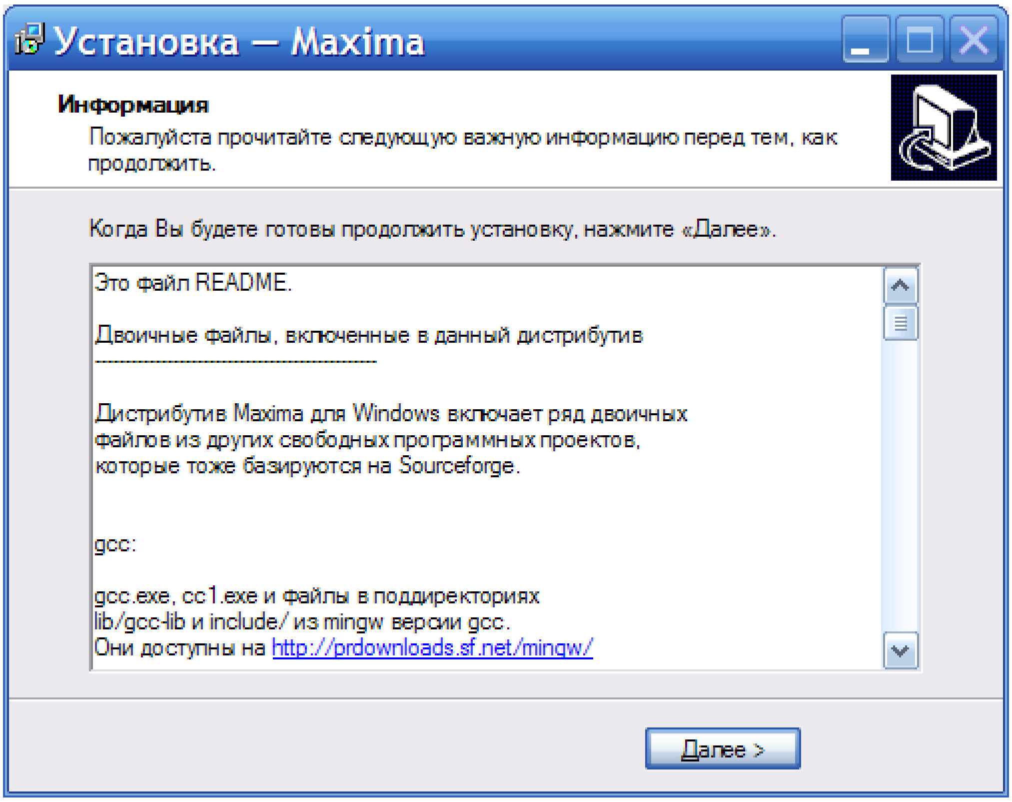


Рис. 11. Предупреждающее информационное сообщение

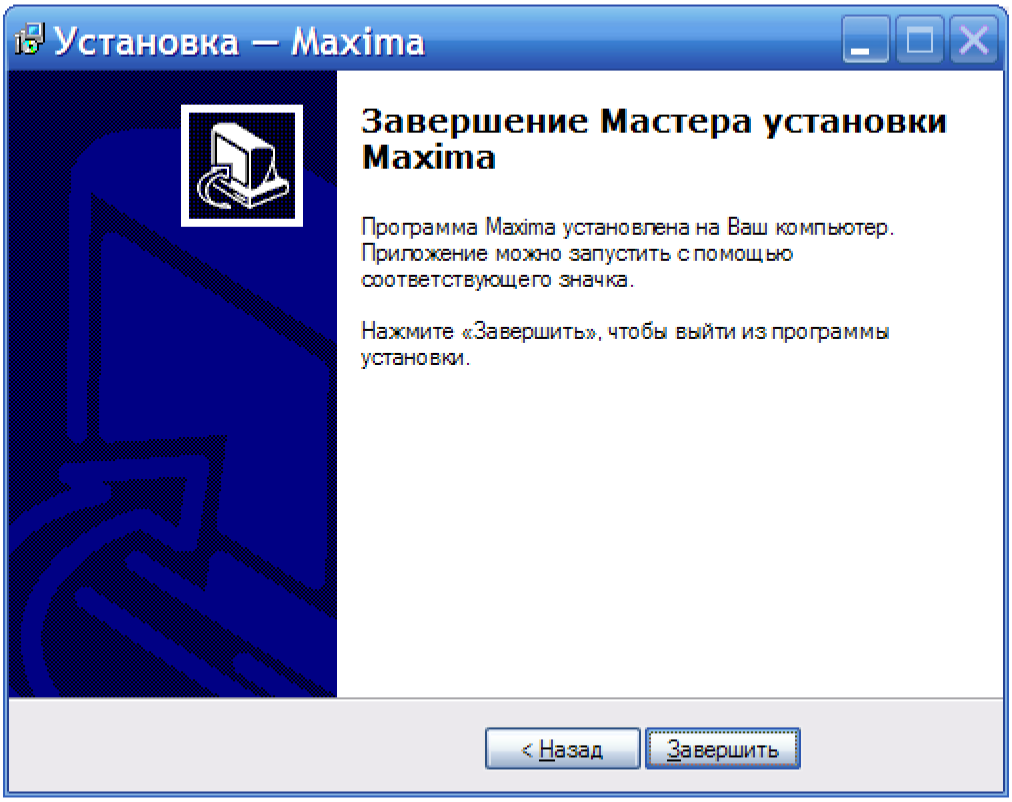


Рис. 12. Завершение установки

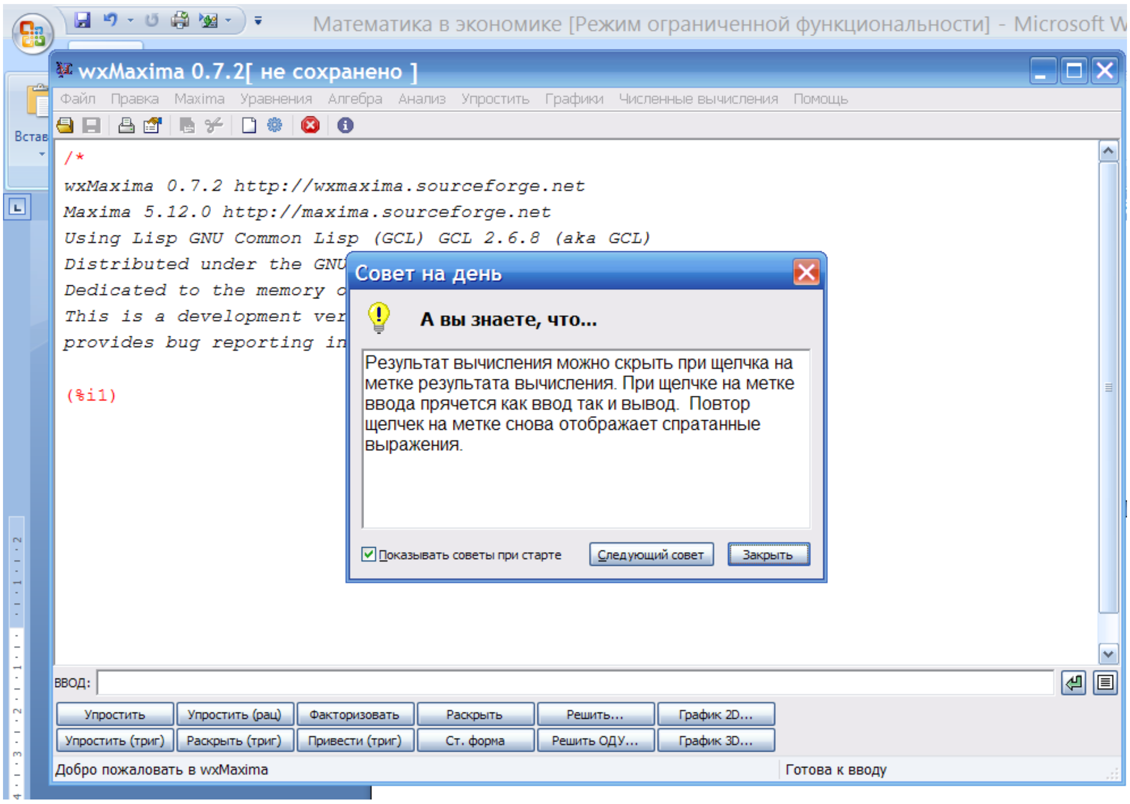
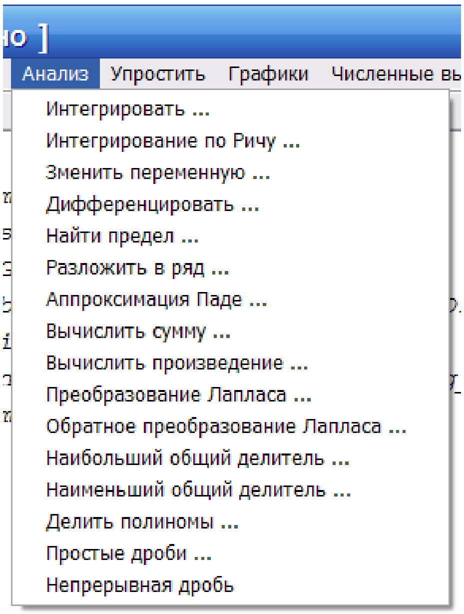
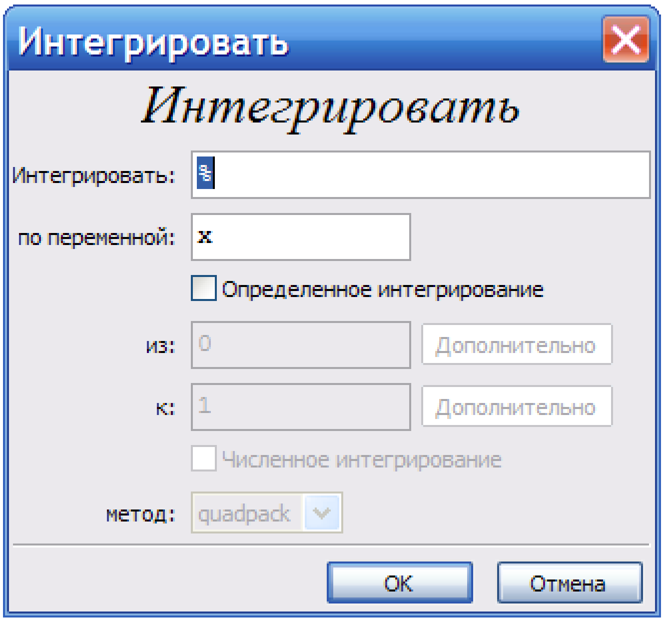


Рис. 13. Внешний вид программы Maxima с графическим интерфейсом wxMaxima.

Ряд наиболее часто используемых функций выведен на кнопки внизу главной панели, практически все остальные доступны через меню в верхней строке (см., например, рис. 14). Например, пункт меню «Анализ» содержит большое количество подпунктов (рис. 14а). При выборе подпункта «Интегрировать» появится панель ввода подынтегральной функции, переменной интегрирования и, если это необходимо для вычисления определенного интеграла, пределов интегрирования.





а) б)

Рис. 14. Выбор функции

Как уже было отмечено выше, программа Maxima предназначена для проведения математических расчетов любого уровня сложности. Она может выполнять аналитические преобразования, находить неопределенные интегралы и производные, аналитически решать алгебраические и дифференциальные уравнения, проводить статистический анализ, решать задачи, используя численные методы. Построение графиков функций, арифметические вычисления – все это и еще многое другое доступно этой программе.

3. Решение задач при помощи программы Maxima

3.1. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 16 \\ -2x_1 - 4x_3 + 2x_4 = -6 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -13 \end{cases}$$

Это уравнение можно переписать в матричном виде: **AX=B.**

Здесь $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}$; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Домножим матричное уравнение слева на $\mathbf{A}^{-1}$. Получим $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, или $\mathbf{EX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, или $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Таким образом, для решения этой системы необходимо найти обратную матрицу и произвести матричное умножение.

Первый способ.

Используем специальную функцию solve, которую можно вызвать через кнопку «Решить» в нижней части окна программы (рис. 15).

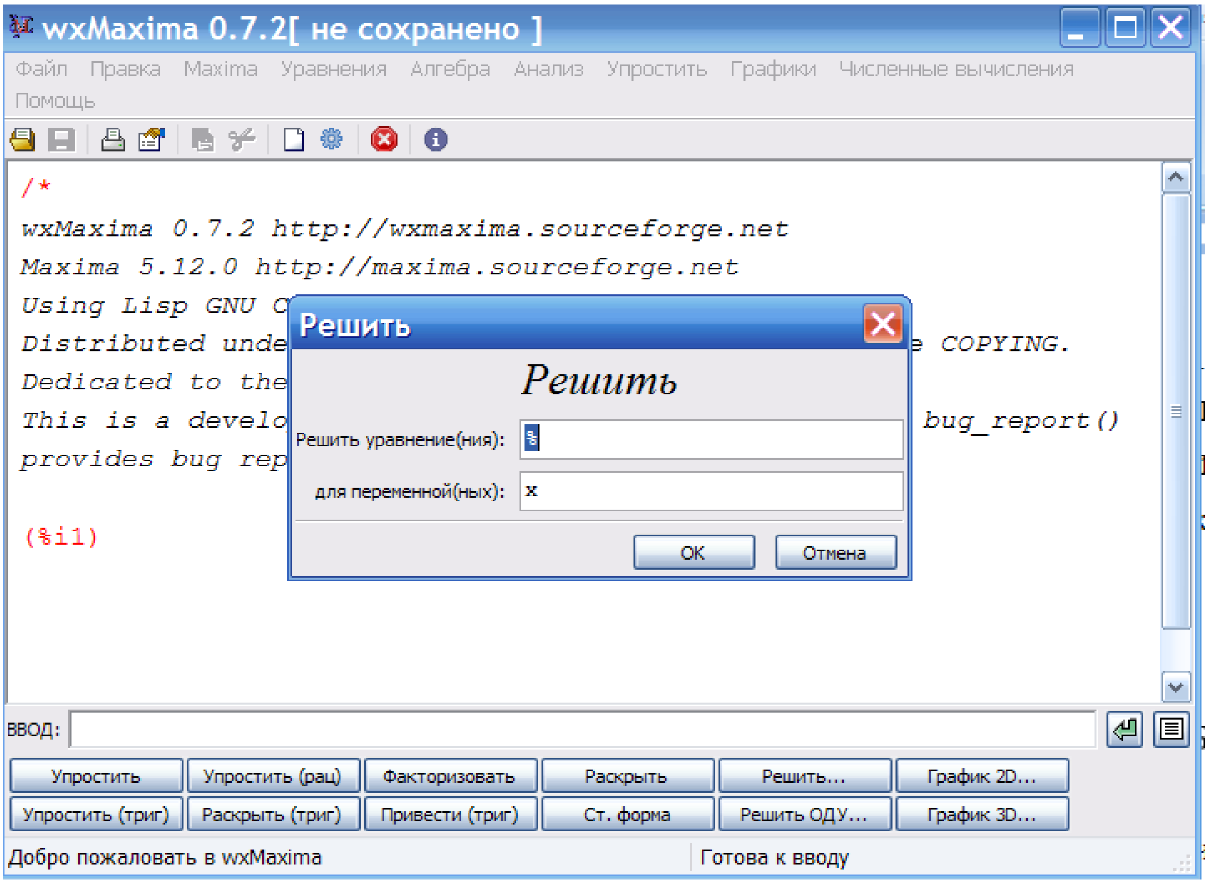


Рис. 15. Панель «Решить»

В верхнее окно панели «Решить» обычным текстом, через запятую и без пробелов, вводятся все уравнения (рис. 16). В качестве знака умножения используется символ «*».

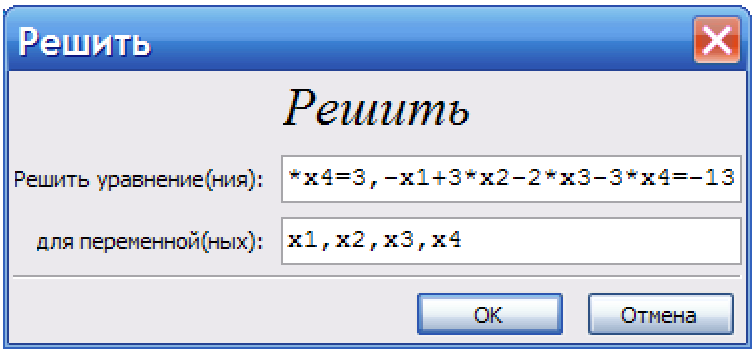


Рис. 16. Ввод уравнений

В нижнем окне панели «Решить» вводятся, также через запятую и пробелов, все неизвестные, которые нужно определить. Следует отметить, что решение может быть не только числовым, но и символьным.

После нажатия кнопки «ОК» в основном окне программы Maxima появляется решение (рис. 17, строка %o1).

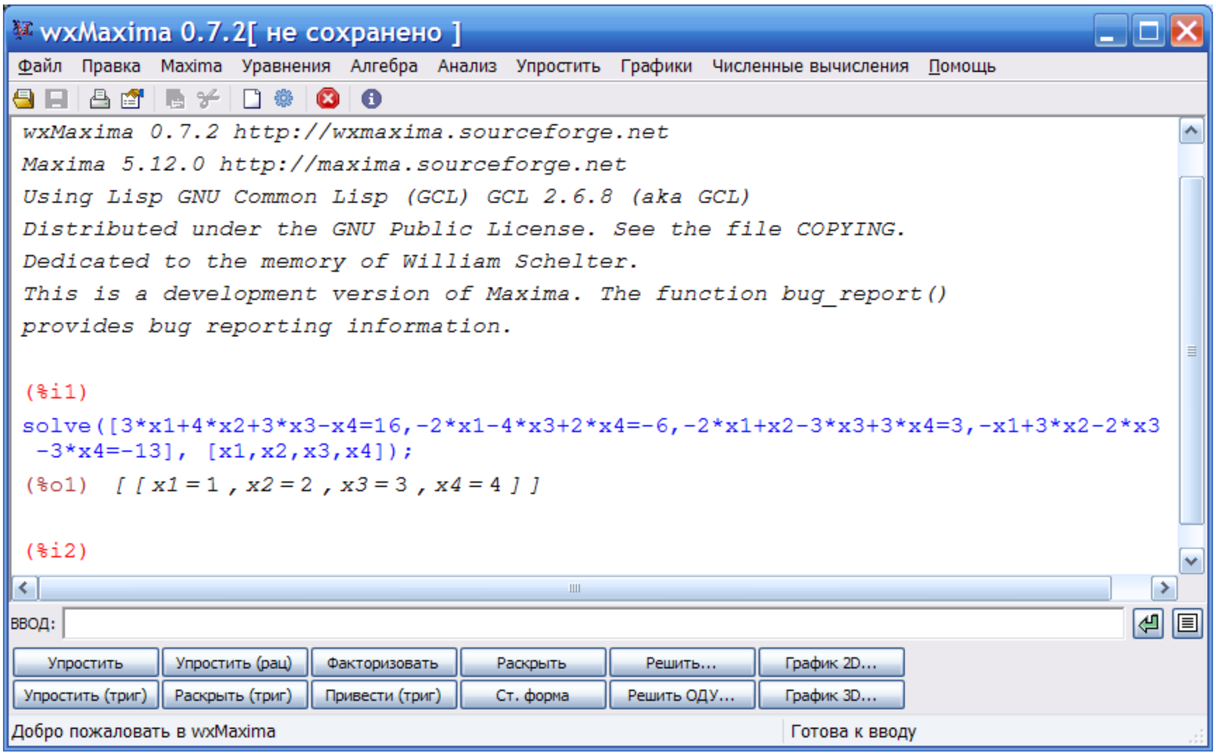


Рис. 17. Решение системы

Второй способ

Теперь решим эту же систему через матрицы. Попутно освоим матричные операции в среде Maxima.

В нижней строке окна программы (окно «ВВОД») набираем «А:», а затем через пункты меню «Алгебра»==> «Ввести матрицу» (рис. 18) вызываем панель «Матрица», в которой задаем размерность матрицы 4x4 (рис. 19), после чего вводим элементы матрицы (рис. 20).

После ввода всех чисел и нажатия кнопки «ОК» в главном окне программы Maxima будет напечатана матрица **A** (рис. 21).

После этого, аналогично вводим матрицу B (рис. 22…24).

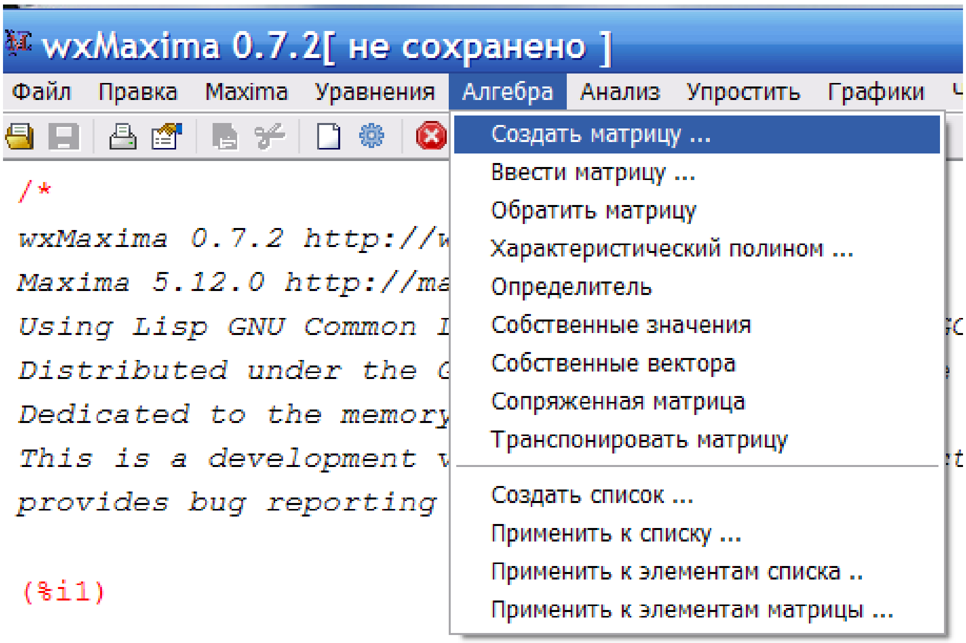


Рис. 18. Создание и ввод новой матрицы

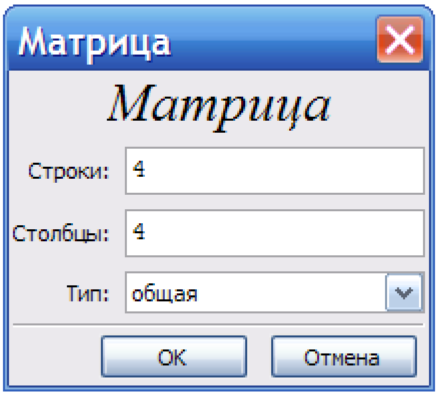


Рис. 19. Определение структуры матрицы

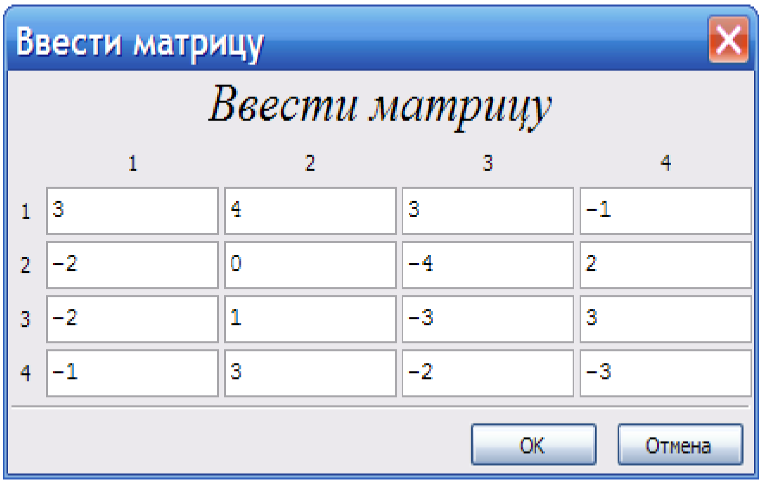
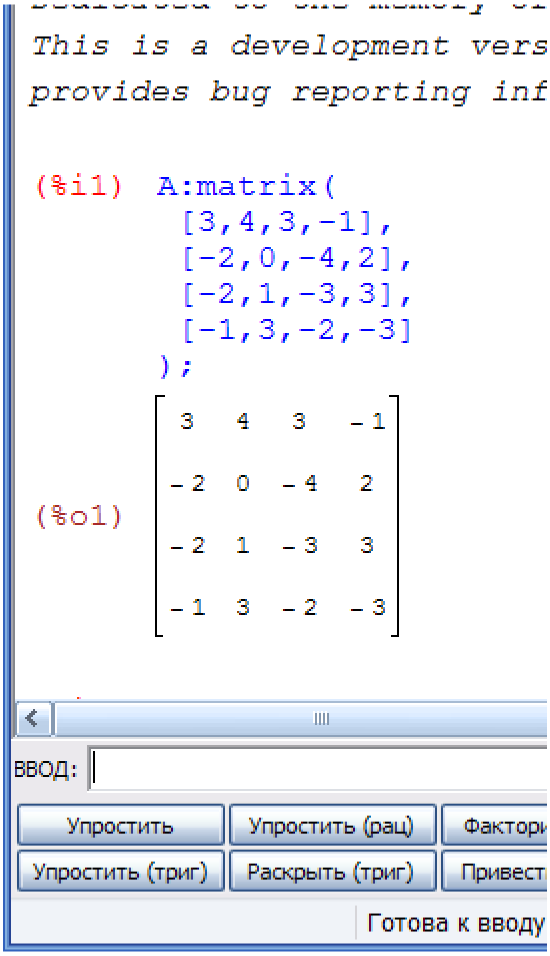


Рис. 20. Ввод значений элементов матрицы



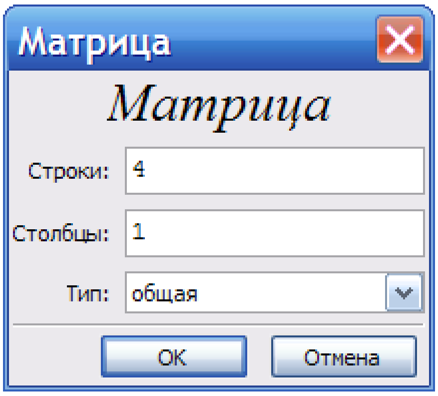


Рис. 21. Результат ввода матрицы системы **A**

Рис. 22. Определение матрицы- столбца

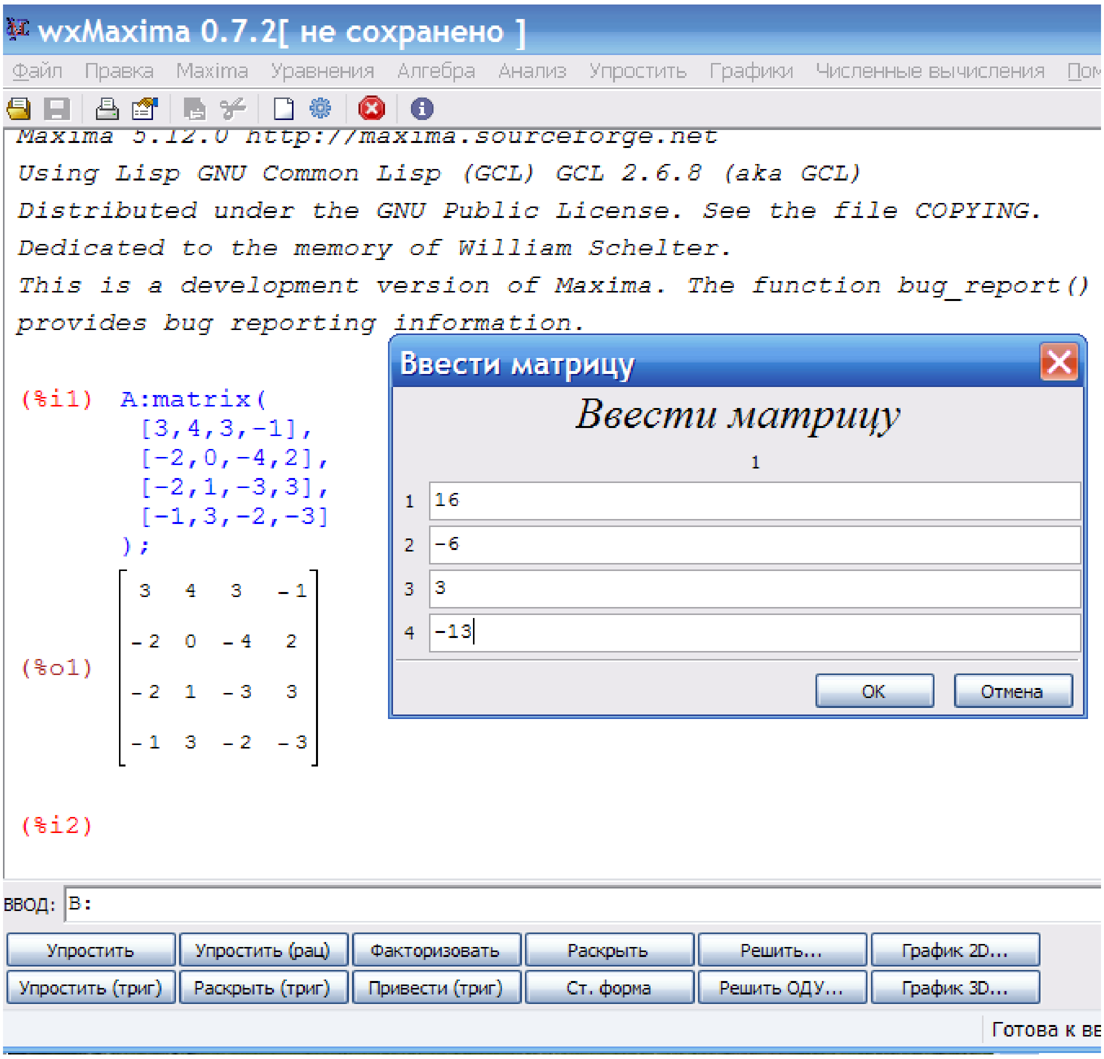


Рис. 23. Ввод матрицы **B**

После ввода матрицы B, печатаем «C:A^^-1;» и получаем обратную матрицу (рис. 24).

Примечание: для нахождения обратной матрицы следует использовать команду «^^-1».

Окончательно найдем решение, умножив матрицы C и B: для этого напечатаем «X:C.B;» (рис. 25).

Примечание: матричное умножение задается обычной точкой.

Как видим, опять получили то же самое решение.

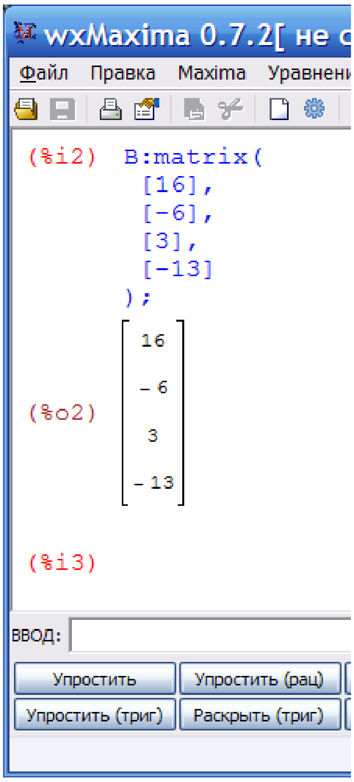


Рис. 24. Матрица **B**

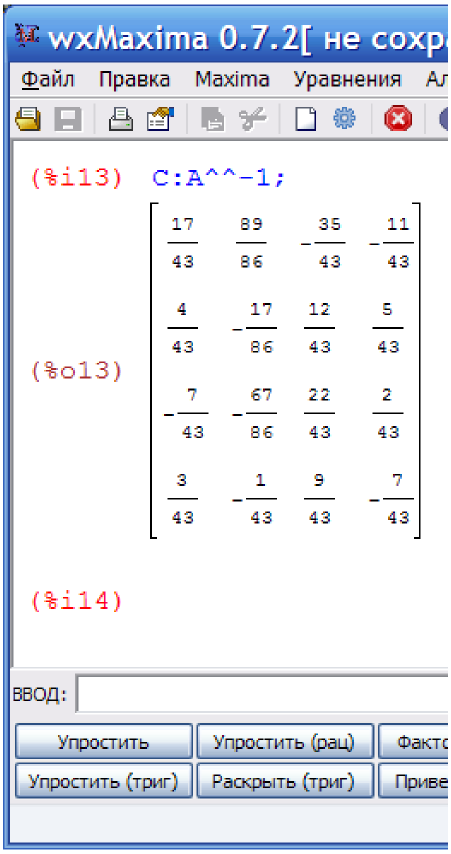


Рис. 25. Обратная матрица

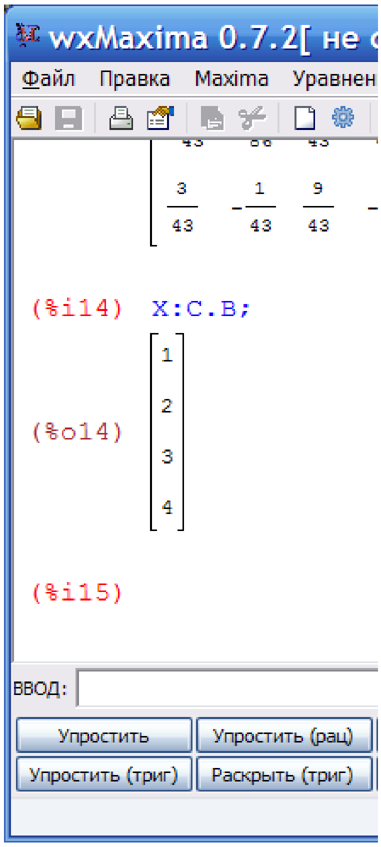


Рис. 26. Решение

3.2. Программа Maxima как научный калькулятор

Как уже отмечалось выше, программа Maxima может быть использована для любых научных расчетов. При этом возможны как численные, так и аналитические выкладки.

При работе с программой есть два пути: первый заключается в выборе соответствующих команд на командной панели внизу или через общее меню, а второй – в текстовом наборе команд с соответствующими аргументами. Автор в данном разделе предпочитает второй способ, т.к. для иллюстрации процесса работы он требует намного меньше места и, с его точки зрения, более понятен.

Краткие руководства по программе Maxima написаны В.И. Тарнавским [4] и Стахиным Н.А. [3].

Ввод команд осуществляется в нижней части окна программы в строке с названием «ВВОД» (рис. 27).

Команды содержат собственно имя команды и операнды.

Например, для вычисления пределов используется функция ”limit”. На рис. 28 представлено несколько примеров ввода.

Первый:

```
(%i1) limit(sin(x)/x,x,0);
(%o1) 1
```

Программа вычислила предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

Синтаксис команды следующий:

ИМЯ(функция, аргумент_функции, значение _аргумента);

ИМЯ – это имя команды (в данном случае, limit);

функция – функция, от которой необходимо найти предел (в данном случае $\dfrac{\sin(x)}{x}$);

значение_аргумента – величина, к которой стремится аргумент_функции (в данном случае 0).

Рис. 27. Примеры ввода команд

Если ввести команду с произвольным символьным аргументом, как показано ниже, то и ответ будет не числовой, а символьный:

```
(%i4) limit(sin(a*x)/x,x,0);
(%o4) a
```

Если перед командой поставить символ «’», то вычисление не производится и печатается формула:

```
(%i6) 'limit((1+1/n)^n,n,inf);
```

(%o6) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}+1\right)^n$

Почему автор называет программу Maxima научным калькулятором?

Дело в том, что, в отличие от ручных калькуляторов, которые называются научными или инженерными, это программа, действительно, позволяет производить ЛЮБЫЕ научные численные или аналитические вычисления. Алгебра и анализ, кратные интегралы и теория поля, дифференциальные уравнения и ряды, теория вероятностей и математическая статистика, линейное и нелинейное программирование, эконометрика, анализ временных рядов – вот неполный перечень математических дисциплин, задачи которых эта программа способна решать как численно, так и аналитически. Кроме этого, она позволяет визуализировать расчеты, т.к. строит великолепные графики.

Более подробно с командами и их операндами, а также с программированием в среде Maxima, можно ознакомиться в работах [3, 4], и на сайте программы [1].

Ниже мы рассмотрим основные команды в ходе решения разнообразных задач.

Задача 3.1. Найти предел числовой последовательности (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{2n^2+5n-3}$

Введем команду: 'limit((n^2-n+2)/(2*n^2+5*n-3),n,inf)

Для обозначения символа бесконечности «∞» используется сокращение «inf».

После нажатия клавиши «Enter» появится следующее изображение:

```
(%i10) 'limit((n^2-n+2)/(2*n^2+5*n-3),n,inf);
```

(%o10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{2\,n^2+5\,n-3}$

Уберем теперь символ «’» перед командой:

```
(%i11) limit((n^2-n+2)/(2*n^2+5*n-3),n,inf);
```

(%o11) $\frac{1}{2}$

Мы получили ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{2n^2+5n-3}=\frac{1}{2}$.

Задача 3.2. Найти предел числовой последовательности (неопределенность вида 1^{∞}).

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n-2}\right)^{n+3}$

Введем команду:

```
(%i12) limit(((n^2-n+1)/(n^2+n-2))^(n+3),n,inf);
```

Is n^2-n+1 positive or negative? p;

(%o12) %e^{-2}

После ввода команды последовал вопрос: является ли выражение положительным? После ответа «p» произошло вычисление предела.

Мы получили ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n-2}\right)^{n+3}=e^{-2}$.

Задача 3.3. Найти предел числовой последовательности (неопределенность вида ∞-∞).

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{3n^2+2}\right)\right)$

Введем команду:

```
(%i3) 'limit(n*(sqrt(3*n^2+1)-sqrt(3*n^2+2)),n,+inf);
```

$$(\%o3)\quad \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{3\,n^2+1}-\sqrt{3\,n^2+2}\right)$$

Теперь уберем символ «'» перед командой:

```
(%i4) limit(n*(sqrt(3*n^2+1)-sqrt(3*n^2+2)),n,+inf);
```

$$(\%o4)\quad -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Мы получили ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{3n^2+2}\right)\right)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Задача 3.4. Найти предел функции (неопределенность вида $\frac{0}{0}$).

Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{(8x^2-128)(x+4)}{(x^2+8x+16)(x-4)}\right)$

Вводим команду и получаем ответ:

```
(%i5) limit((8*x^2-128)*(x+4)/((x^2+8*x+16)*(x-4)),x,4);
(%o5) 8
```

Задача 3.5. Найти предел функции (неопределенность вида $\frac{0}{0}$).

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{8^{2x}-2^{8x}}{7x-\sin(x)}\right)$

Вводим команду и получаем ответ:

```
(%i6) limit((8^(2*x)-2^(8*x))/(7*x-sin(x)),x,0);
```

$$(\%o6)\quad -2\left(\frac{2\log(2)}{3}-\frac{\log(8)}{6}\right)$$

Задача 3.6. Найти предел функции (неопределенность вида1^{∞}).

Найти предел $\lim\limits_{x\to 216}\left(\frac{5x-214}{4x+2}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-6}}$

Вводим команду и получаем ответ:

```
(%i7) limit(((5*x-214)/(4*x+2))^(1/(x^(1/3)-6)),x,216);
```

(%o7) $\%e^{54/433}$

3.4. Производная. Исследование функций

Для нахождения производной в программе Maxima применяется команда diff

Задача 3.7. Поиск экстремумов.

Найти экстремумы функции $y=-9x^3-4x^2+5x$

1. Определим функцию:

```
(%i15) y(x):=-9*x^3-4*x^2+5*x;
```

(%o15) $y(x):=(-9)x^3-4x^2+5x$

2. Найдем производную:

```
(%i16) f(x):=diff(y(x),x);
```

(%o16) $f(x):=diff(y(x),x)$

```
(%i17) f(x);
```

(%o17) $-27x^2-8x+5$

3. Найдем нули производной:

```
(%i18) solve(f(x)=0,x);
```

(%o18) $[x=-\frac{\sqrt{151}+4}{27}, x=\frac{\sqrt{151}-4}{27}]$

4. Найдем вторую производную:

```
(%i19) g(x):=diff(f(x),x);
```

(%o19) $g(x):=diff(f(x),x)$

```
(%i20) g(x);
```

(%o20) $-54x-8$

Далее может возникнуть проблема, т.к. мы задали функцию g(x) через производную другой функции, т.е. ее аргументом является функция. Переопределим функцию второй производной:

```
(%i25) g(x):=-54*x-8;
(%o25) g(x):=(-54)x-8
```

5. Вычислим значения второй производной в точках, в которых первая производная обращается в ноль:

```
(%i26) g(-(sqrt(151)+4)/27);
```

(%o26) $-2(-\sqrt{151}-4)-8$

```
(%i27) g((sqrt(151)+4)/27);
```

(%o27) $-2(\sqrt{151}+4)-8$

Для преобразования подобных выражений в десятичную дробь используется функция float:

```
(%i31) float(%o26),numer;
(%o31) 24.57641145488901
(%i32) float(%o27),numer;
(%o32) -40.57641145488901
```

Аргументом этой функции (так же, как и у других функций) может быть число, выражение или ссылка по адресу, как в данном случае.

В первой точке вторая производная больше нуля, а во второй – меньше нуля, следовательно, в первой точке наблюдается минимум, во второй – максимум.

Задача 3.8. Минимаксная задача.

Найти минимальное и максимальное значение функции $y = x^3 - x^2 - x + 1$ на отрезке [-2, 4].

1. Задаем функцию:

```
(%i6) y(x):=x^3-x^2-x+1;
```

(%o6) $y(x):=x^3-x^2-x+1$

2. Находим производную:

```
(%i7) diff(y(x),x);
```

(%o7) $3x^2-2x-1$

3. Находим нули производной:

```
(%i8) solve(diff(y(x))=0,x);
```

(%o8) $[x=1, x=-\frac{1}{3}, del(x)=0]$

4. Т.к. обе точки, в которых производная обращается в ноль, находятся внутри указанного в условиях отрезка, то вычисляем значения функции как в стационарных точках, так и на границах отрезка (рис. 3.2):

(%i9) y(1); (%o9) 0	(%i10) y(-1/3); (%o10) $\frac{32}{27}$	(%i11) y(-2); (%o11) -9	(%i12) y(4); (%o12) 45
а)	б)	в)	г)

Рис. 3.2. Значения функции: а) x=0; б) x=-1/3; в) x=-2; г) x=4.

Итак, точка минимума: (-2; -9); точка максимума: (4; 45).

Задача 3.9. Исследование функции и построение ее графика.

Произвести полное исследование функции и построить ее график: $y = \sqrt[3]{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}$

Зададим функцию:

```
(%i1) y(x):=(x^3-9*x^2+26*x-24)^(1/3);
```

(%o1) $y(x) := \left(x^3 - 9\,x^2 + 26\,x - 24\right)^{1/3}$

1). ООФ: $x \in$R.

2). Симметрия отсутствует.

3). Точки пересечения с осями координат:

При x=0:

```
(%i2) y(0);
```

(%o2) $-2\,3^{1/3}$

или

```
(%i3) float(%);
(%o3) -2.884499140614817
```

Найдем, когда функция обращается в ноль:

```
(%i4) solve(y(x)=0,x);
```

(%o4) $[\,x = 4\,,\,x = 2\,,\,x = 3\,]$

4). Точек разрыва и вертикальных асимптот нет.

5). Наклонные асимптоты:

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y=ax+b$.

По определению асимптот параметры a и b находятся как пределы:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - ax)$$

Найдем первый параметр:

```
(%i5) a:limit(y(x)/x,x,inf);
(%o5) 1
```

Найдем второй параметр:

```
(%i6) b:limit((y(x)-a*x),x,inf);
(%o6) -3
```

Таким образом, функция имеет наклонную асимптоту *y*=*x*-3.

6). Точки экстремума. Интервалы монотонности.

Найдем производную:

```
(%i7) diff(y(x),x);
```

(%o7) $$\frac{3x^2-18x+26}{3(x^3-9x^2+26x-24)^{2/3}}$$

Разложим знаменатель на множители, применив к функции операцию «Упростить (рац)», для чего просто нажмем на эту кнопку:

```
(%i9) radcan(%);
```

(%o9) $$\frac{3x^2-18x+26}{3(x-4)^{2/3}(x-3)^{2/3}(x-2)^{2/3}}$$

Найдем нули производной:

```
(%i10) solve(diff(y(x))=0,x);
```

(%o10) $$[x=-\frac{\sqrt{3}-9}{3}, x=\frac{\sqrt{3}+9}{3}, del(x)=0]$$

В десятичных дробях корни имеют следующее выражение:

```
(%i11) float(%);
```

(%o11) $[x=2.422649730810374, x=3.577350269189625$

Следует отметить, что при *x*=2, *x*=3, *x*=4 первая производная терпит разрыв, и ее значение в этих точках стремится в бесконечности. Таким образом, график функции в этих точках вертикален.

При *x* <2.4226, *y'*>0 - функция возрастает;

При 2.4226< *x* <3.5774, *y'*<0 - функция убывает;

при 3.5774< *x* , *y'* >0 - функция возрастает.

Таким образом, *x* =3.5774 - точка минимума; *x*=2.4226 - точка максимума.

7). Точки перегиба. Выпуклость и вогнутость.

Найдем вторую производную:

(%i12) diff(y(x),x,2);

$$(\%o12)\quad \frac{6x-18}{3(x^3-9x^2+26x-24)^{2/3}}-\frac{2(3x^2-18x+26)^2}{9(x^3-9x^2+26x-24)^{5/3}}$$

Сначала упростим это выражение:

(%i13) radcan(%);

$$(\%o13)\quad -\frac{(x-4)^{1/3}(x-3)^{1/3}(x-2)^{1/3}(6x^2-36x+56)}{9x^6-162x^5+1197x^4-4644x^3+9972x^2-11232x+5184},$$

а затем разложим на множители:

(%i14) factor(%);

$$(\%o14)\quad -\frac{2(3x^2-18x+28)}{9(x-4)^{5/3}(x-3)^{5/3}(x-2)^{5/3}}$$

Найдем теперь нули второй производной:

(%i15) solve(%=0,x);

$$(\%o15)\quad [\,x=-\frac{\sqrt{3}\,\%i-9}{3},\ x=\frac{\sqrt{3}\,\%i+9}{3}\,]$$

Корни комплексные, на множестве действительных чисел корней нет. Таким образом, вторая производная в ноль не обращается. Однако, она терпит разрыв в точках $x=2$, $x=3$, $x=4$. При этом, при переходе через эти точки вторая производная меняет знак, следовательно – это точки перегиба.

Теперь построим график. Предварительно, зададим функцию асимптоты:

(%i20) g(x):=x-3;

$$(\%o20)\quad g(x):=x-3$$

Для построения графика нажмем кнопку «График 2D». Появится панель мастера «График 2D» (рис. 28).

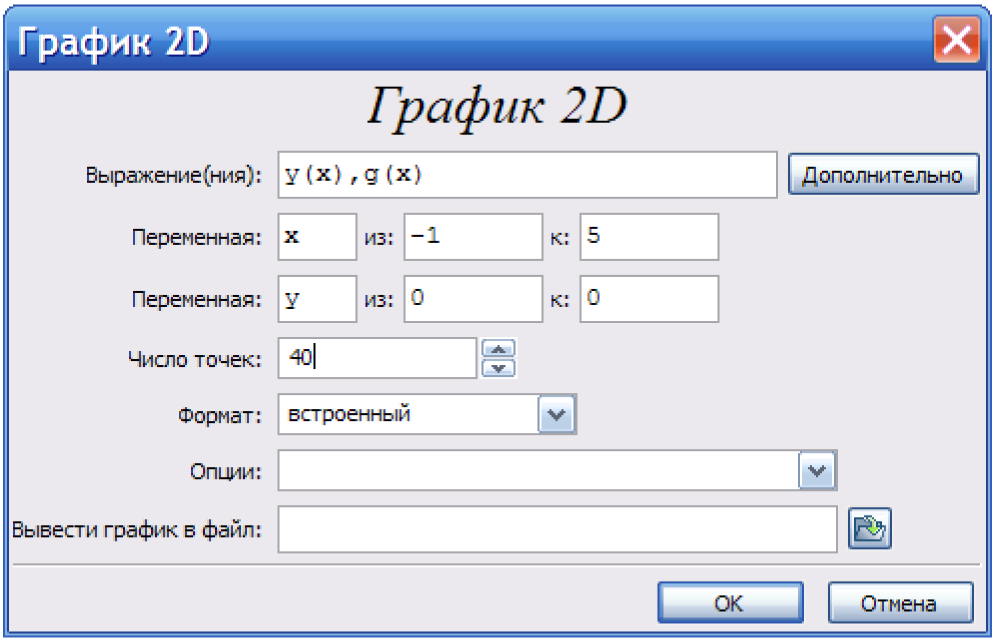


Рис. 28. Ввод данных для построения графика

В первую строку необходимо занести через запятую функции или выражения, для которых необходимо построить графики, во второй и третьей – диапазоны изменения переменных. В данном графике диапазон изменения параметра *y* был оставлен без изменений (в этом случае масштаб определяется автоматически).

После нажатия кнопки «ОК» был построен график (рис. 29).

```
(%i21) wxplot2d([y(x),g(x)], [x,-1,5],
        [nticks,40])$
Output file "C:/Documents and Settings/лдрлплооо/maxout.png".
```

(%t21)

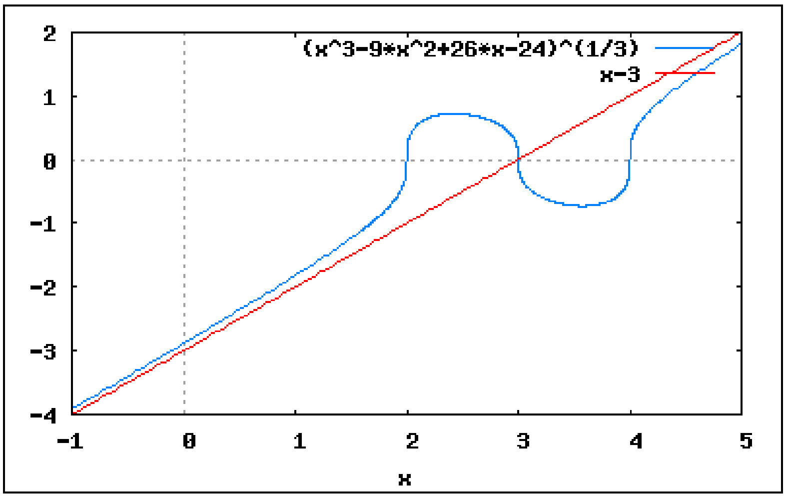


Рис. 29. Графики функции и ее асимптоты

3.5. Интеграл

Задача 3.10. Неопределенный интеграл.

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}dx$

В программе Maxima для интегрирования имеется функция integrate. Ее синтаксис:

integrate(функция, аргумент_функции {,нижний_предел, верхний_предел})

В фигурные скобки заключены необязательные операнды: пределы интегрирования. Если они отсутствуют, то производится поиск неопределенного интеграла.

Введем команду:

```
(%i1) integrate((x-1)/(x^2+1),x);
```

$$(\%o1)\quad \frac{\log(x^2+1)}{2} - \operatorname{atan}(x)$$

Итак, мы сразу же получили, что интеграл равен

$$\int \frac{x-1}{x(x^2+1)}dx = \frac{\mathbf{ln}(x)}{2} - \mathbf{arctg}(x)$$

Как видим, переменная интегрирования здесь опускается.

Задача 3.11. Определенный интеграл.

Вычислить определенный интеграл $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Введем команду:

```
(%i2) integrate(exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi),x,0,3);
```

$$(\%o2)\quad \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{2}$$

Здесь была использована математическая константа число π=3.14159… (отношение длины окружности к диаметру). В программе Maxima она обозначается «%pi».

Ответ был получен через встроенную функцию erf(x) – интеграл ошибок. Получим ответ в привычной форме, используя функцию float^

```
(%i3) float(%);
(%o3) 0.49865010196837
```

Итак, наш интеграл вычислен с очень большой точностью. Если будет необходимость, то можно увеличить точность, войдя в раздел меню «Численные вычисления»==>«Установить точность».

Количество знаков зависит только от объема памяти компьютера и, возможно, времени, которое Вы готовы потратить в ожидании ответа.

Ниже показано графическое представление интеграла:

```
(%i4) 'integrate(exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi),x,0,3);
```

$$(\%o4)\quad \frac{\int_0^3 \%e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}{\sqrt{2}\sqrt{\%pi}}$$

Как видим, представление не очень красивое (зато ВСЁ бесплатно).

Задача 3.12. Несобственный интеграл.

Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

Введем команду:

```
(%i1) integrate(1/(x^2+1),x,0,inf);
```

$$(\%o1)\quad \frac{\%pi}{2}$$

Как видим, мы получили требуемый результат.

3.6. Ряды

Задача 3.13. Сходимость и суммы числовых рядов.

Исследовать ряд на сходимость и найти его сумму, если он сходится: $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{34n-82}{n^3-2n^2-5n+6}$.

Применим признак Даламбера, для чего нужно найти предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Выполним расчеты.

Задаем функцию (общий член ряда):

```
(%i1) a(n):=(34*n-82)/(n^3-2*n^2-5*n+6);
```

$$(\%o1)\quad a(n):=\frac{34\,n-82}{n^3-2\,n^2+(-5)\,n+6}$$

Вычисляем предел:

```
(%i2) limit(a(n+1)/a(n),n,inf);
(%o2) 1
```

Как видим, сделать вывод о сходимости или расходимости невозможно.

Попробуем преобразовать и применить признаки сравнения и интегральный признак сходимости:

$$a_n=\frac{34n-82}{n^3-2n^2-5n+6}<\frac{34n}{n^3-2n^2-5n+6}<\frac{34n}{n^3-2n^2-5n}<$$

$$<\frac{34n}{n^3-2n^2-5n^2}<\frac{34n}{n^3-n^3/2}=68\frac{n}{n^3}=\frac{68}{n^2}=b_n$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{68}{x^2}$. Т.к. при x>0 $f(n)=b(n)$, то можно применить интегральный признак Коши.

Вычислим интеграл $\int\limits_6^\infty \frac{68}{x^2}dx$:

```
(%i3) integrate(68/x^2,x,6,+inf);
```

$$(\%o3)\quad \frac{34}{3}$$

Т.к. получено конечное значение, то интеграл сходится, следовательно ряд $\sum\limits_{n=6}^{\infty} b_n$ сходится, а т.к. $0<a_n<b_n$ при всех достаточно больших n, то и исходный ряд тоже сходится.

Найдем теперь сумму ряда. Сначала без использования программы Maxima, а затем проверим результат с ее помощью.

Разобьем дробь a_n на элементарные дроби, для чего разложим знаменатель на множители. Для этого найдем корни знаменателя, т.е. решим уравнение $n^3-2n^2-5n+6=0$.

Легко заметить, что $n=1$- корень этого уравнения.

Для нахождения двух остальных корней поделим полином третьей степени на (n-1):

$$
\begin{array}{l|l}
n^3-2n^2-5n+6 & n-1 \\
\cline{2-2}
\underline{n^3-\ \ n^2\qquad\quad} & n^2-n-6 \\
\quad -n^2-5n & \\
\quad \underline{-n^2+n\quad} & \\
\qquad\quad \underline{-6n+6} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Решим квадратное уравнение $n^2-n-6=0$. Имеем: $n=-2$ и $n=3$. Таким образом, знаменатель раскладывается на следующие множители:

$$n^3-2n^2-5n+6=(n-1)(n+2)(n-3).$$

Исходная дробь a(n) может быть представлена в виде:

$$a_n=\frac{34n-82}{n^3-2n^2-5n+6}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n+2}+\frac{c}{n-3}$$

Приведем правую часть дроби к общему знаменателю:

$$a_n=\frac{34n-82}{n^3-2n^2-5n+6}=\frac{an^2-an-6a+bn^2-4bn+3b+cn^2+cn-2c}{(n-1)(n+2)(n-3)}$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a-4b+c=34 \\ -6a+3b-2c=-82 \end{cases}$$

Ее решение: $a=8;\ b=-10;\ c=2.$.

Таким образом,

$$a_n=\frac{8}{n-1}-\frac{10}{n+2}+\frac{2}{n-3}$$

Рассмотрим последовательности, образуемые каждым слагаемым. Расположим их друг под другом так, чтобы в каждом столбце были одинаковые знаменатели, и сложим:

$$
\begin{array}{l}
\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}+\frac{2}{8}+\ \frac{2}{9}+\frac{2}{10}+\ldots+ \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\frac{10}{8}-\frac{10}{9}-\frac{10}{10}-\ldots+ \\
\underline{\qquad\quad \frac{8}{5}+\frac{8}{6}+\frac{8}{7}+\frac{8}{8}+\ \frac{8}{9}+\frac{8}{10}+\ldots\qquad}
\end{array}
$$

Видно, что сумма всех столбцов, кроме первых пяти, равна нулю. Таким образом, сумма ряда равна

$$S=\frac{8}{5}+\frac{8}{6}+\frac{8}{7}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}=6.2619047\,.$$

Найдем теперь сумму ряда с помощью программы Maxima:

```
(%i10)  sum((34*n-82)/(n^3-2*n^2-5*n+6),n,6,inf);
```

$$(\%o10)\quad \sum_{n=6}^{\infty}\frac{34\,n-82}{n^3-2\,n^2-5\,n+6}$$

Для того, чтобы получить ответ, необходимо добавить команду simpsum:

```
(%i11)  sum((34*n-82)/(n^3-2*n^2-5*n+6),n,6,inf),simpsum;
```

$$(\%o11)\quad \sum_{n=6}^{\infty}\frac{34\,n}{n^3-2\,n^2-5\,n+6}-\frac{82}{n^3-2\,n^2-5\,n+6}$$

Ответ не дан.

Попытаемся найти решение через предел частичных сумм.

Зададим функцию частичной суммы $S(m)=\sum_{n=6}^{\infty}a(n)$:

```
(%i15)  S(m):=sum(a(n),n,6,m);
(%o15)  S(m):=sum(a(n),n,6,m)
```

Найдем предел этой функции:

```
(%i16)  limit(S(m),m,inf);
```

$$(\%o16)\quad \lim_{m\to\infty}\sum_{n=6}^{m}\frac{34\,n-82}{n^3-2\,n^2-5\,n+6}$$

Как видим, предел тоже не находится.

Попытаемся приблизиться к ответу, увеличивая значение верхнего предела суммы: m=1000

```
(%i18)  S(1000);
```

$$(\%o18)\quad \frac{51899146352983}{8333291666700}$$

```
(%i21) float(%);
(%o21) 6.227928701976558
```

m=1000000

```
(%i22) s(1000000);float(%);
```

$$(\%o22)\quad \frac{5218225634914543742460298333}{833333333329166666666700000}$$

```
(%i23)
(%o23) 6.261870761928762
```

Разница в найденном нами точном ответе и приближенном, найденном программой Maxima – в четвертом знаке после запятой. Можно считать, что мы нашли ответ точный.

Задача 3.14. Сходимость числового ряда.

Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (2n+2)!}{(3n)!}$.

Применим признак Даламбера, для чего определим фунцию общего члена ряда, а затем найдем предел отношения последующего члена к предыдущему:

```
(%i1) a(n):=2^n*(2*n+2)!/(3*n)!;
```

$$(\%o1)\quad a(n):=\frac{2^n (2\,n+2)!}{(3\,n)!}$$

```
(%i2) limit(a(n+1)/a(n),n,inf);
(%o2) 0
```

Т.к. предел отношения равен нулю, то ряд сходится.

Задача 3.15. Сходимость степенного ряда.

Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=4}^{\infty} (-9n^2 + n - 6) x^{n-1}$.

Найдем радиус сходимости:

```
(%i5) a(n):=-9*n^2+n-6;
```

$$(\%o5)\quad a(n):=(-9)\,n^2+n-6$$

```
(%i6) limit(a(n+1)/a(n),n,inf);
(%o6) 1
```

Радиус сходимости равен единице, следовательно, ряд сходится абсолютно при $-1 < x < 1$.

При $|x| = 1$ нарушается необходимый признак сходимости: члены ряда должны стремиться к нулю. Т.к. множитель при x^{n-1} неограниченно растет по модулю, то и все произведение также неограниченно растет. Ряд расходится.

Задача 3.16. Разложение в ряд Тейлора.

Разложить функцию в ряд Тейлора: $f(x) = x \cdot \cos^2(x)$ в точке x=0.

Для разложения функции в ряд Тейлора служит функция taylor. Ее синтаксис: taylor(f,x,a,n).

Здесь f – функция, которую требуется разложить в ряд Тейлора; x – переменная, по которой производится разложение; a – точка, в которой производится разложение; n – максимальная степень переменной x, до которой выписывается ряд Тейлора.

Введем команду:

```
(%i2) taylor(x*cos(x),x,0,10);
```

$$(\%o2) \quad x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}-\frac{x^7}{720}+\frac{x^9}{40320}+...$$

Сделаем то же, только теперь будем вычислять функцию в точке $\pi/2$:

```
(%i3) taylor(x*cos(x),x,%pi/2,10);
```

$$(\%o3) \quad -\frac{\%pi\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)}{2}-\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^2+\frac{\%pi\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^3}{12}+\frac{\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^4}{6}-\frac{\%pi\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^5}{240}-$$
$$\frac{\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^6}{120}+\frac{\%pi\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^7}{10080}+\frac{\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^8}{5040}-\frac{\%pi\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^9}{725760}-\frac{\left(x-\frac{\%pi}{2}\right)^{10}}{362880}+...$$

3.7. Дифференциальные уравнения

Задача 3.17. Решение обыкновенного дифференциального уравнения

Решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Для решения дифференциальных уравнений используется команда ode2. Ее синтаксис:

ode2(уравнение, имя_функции, имя_аргумента).

Зададим уравнение:

```
(%i1) 'diff(y,x)-(x+y)/(x-y)=0;
```

(%o1) $\frac{d}{d\,x}y-\frac{y+x}{x-y}=0$

Введем команду:

```
(%i2) ode2(%,y,x);
```

(%o2) $\frac{log(y^2+x^2)+2\,atan\left(\frac{x}{y}\right)}{4}=\%c$

Задача 3.18. Задача Коши.

Решить задачу Коши:

$$y''-4y'+4y=e^{3x},\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$$

Записываем уравнение:

```
(%i1) 'diff(y,x,2)-4*'diff(y,x,1)+4*y=exp(3*x);
```

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}y-4\left(\frac{d}{d\,x}y\right)+4\,y=\%e^{3\,x}$

Решаем уравнение:

```
(%i2) ode2(%,y,x);
```

(%o2) $y=\%e^{3\,x}+(\%k2\,x+\%k1)\%e^{2\,x}$

Мы получили, что решение уравнения есть следующая функция:

$$y=e^{3x}+(k2\cdot x+k1)e^{2x}.$$

При помощи функции ic2 учтем начальные условия:

```
(%i3) ic2(%,x=0,y=0,'diff(y,x)=1);
```

(%o3) $y=\%e^{3\,x}-\%e^{2\,x}$

Окончательно получаем: $y=e^{3x}-e^{2x}$

4. Теория вероятностей и математическая статистика

4.1. Задачи теории вероятностей

Задача 4.1. Задача о лотерейных билетах.

В партии из 19 лотерейных билетов 9 выигрышных. Куплено 12 билетов. Какова вероятность, что среди них 7 выигрышных?

Решение. Здесь используется гипергеометрическое распределение.

Вероятность того, что при покупке n билетов из партии объемом N, в которой имеется D выигрышных, мы получим d выигрышных, равна $p = \dfrac{C_D^d C_{N-D}^{n-d}}{C_N^n}$.

Здесь $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - биномиальный коэффициент, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, причем $0! = 1! = 1$.

Для расчетов воспользуемся программой Maxima.

Биномиальный коэффициент вычисляется при помощи функции binomial(n,m), где n, m имеют тот же смысл, что и выше.

Вводим команду:

```
(%i5) 'binomial(9,7)*binomial(10,5)/binomial(19,12);
```

$$(\%o5)\quad \frac{756}{4199}$$

Приводим к десятичному виду:

```
(%i6) float(%);
(%o6) 0.18004286734937
```

Ответ: $p = 0.18$

Задача 4.2. Задача о днях рождения.

Сколько человек должно быть в группе, чтобы вероятность совпадения дней рождения хотя бы у двух человек превышала 0,5?

Решение. Найдем дополнительную вероятность, т.е. вероятность того, что ни у какой пары студентов нет совпадающих дней рождения.

Пусть в группе n студентов. Всего количество размещений k дней рождения по 365 дням года равно $r = 365^n$.

Первый человек в группе может иметь $m_1 = 365$ вариантов дня рождения. 2-ой, для того, чтобы его день рождения не совпал с днем рождения первого, может иметь $m_2 = 365 - 1 = 364$ варианта дня рождения, ..., i -й человек может иметь $m_i = 365 - (i-1)$ варианта дня рождения.

Всего вариантов выбора разных дней рождения у n человек имеется

$$m = \prod_{i=1}^{n} (365 - (i-1))$$

Вероятность равна $p = \dfrac{m}{r}$ или

$$p = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{365 - (i-1)}{365^k} \right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1 - (i-1)}{365} \right)$$

Нам нужно решить следующее неравенство относительно n:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1 - (i-1)}{365} \right) < \frac{1}{2}.$$

При этом нас будет интересовать наибольшее приближение к числу ½.

Для решения этого неравенства снова используем программу Maxima.

К сожалению, напрямую решить это неравенство нам не удастся (необходимо составлять хоть и небольшую, но программу, что выходит за рамки данной книги).

Тем не менее, можно применить универсальный метод последовательного приближения.

Определим функцию:

```
(%i1) a(n):=product(1-(i-1)/365,i,1,n);
```

$$\text{(\%o1)}\quad a(n) := product\left(1 - \frac{i-1}{365}, i, 1, n\right)$$

Эта функция считает необходимую нам вероятность. Вычислим эту вероятность при нескольких значениях параметра n – количестве студентов в группе.

```
(%i2) a(50),float;
(%o2) 0.02962642042201
```

Очень мало.

```
(%i3) a(10),float;
(%o3) 0.88305182228892
```

Наоборот, очень много. Делим, далее, интервалы пополам.

```
(%i4) a(30),float;
(%o4) 0.2936837572807З
(%i5) a(20),float;
(%o5) 0.5885616164194Z
(%i6) a(25),float;
(%o6) 0.43130029603054
(%i7) a(23),float;
(%o7) 0.49270276567601
```

Похоже, ближе уже не подобраться. Попробуем число 22:

```
(%i9) a(22),float;
(%o9) 0.52430469233745
```

Перебор.

Итак, мы получили, что при 23 студентах в группе вероятность того, что хотя бы у двух из них совпадут дни рождения, превысит 0,5.

Ответ: 23 человека

Задача 4.3. Задача об отказах. Распределение Пуассона.

В цехе имеется *n*=100 станков. Количество отказов *k* за смену подчиняется закону Пуассона с параметром λ=0.34. Найти вероятность того, что количество станков, находящихся в ремонте удовлетворяет неравенству $3 \le k \le 5$.

Решение. Закон Пуассона: вероятность *k* отказов равна

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Вероятность того, что $m_1 \le k \le m_2$, равна

$$P(m_1 \le k \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} p_k = e^{-\lambda} \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Зададим функцию:

```
(%i13)
p(m1,m2,Lambda):=exp(-Lambda)*sum(Lambda^k/k!,k,m1,m2);
(%o13) p(m1,m2,Lambda):=exp(-Lambda)
```

$$sum\left(\frac{Lambda^k}{k!}, k, m1, m2\right)$$

Вычисляем при заданных нам значениях:

```
(%i14) p(3,5,0.34);
(%o14) 0.0050858382438311
```

Ответ: $p = 0.005$

Задача 4.4. Нормальное распределение.

Известно, что средняя выручка торговой точки имеет нормальное распределение с математическим ожиданием MX=125000 руб. и дисперсией DX=(25000 руб.)^2. Найти вероятность того, что выручка в некоторый день превзойдет 140000 руб.

Решение. Для решения используем нормальную функцию распределения, которая имеет вид:

$$F(x_0) = P(\xi < x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\frac{(x - MX)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Если сделать замену $t = \dfrac{x - MX}{\sigma}$ и $t_0 = \dfrac{x_0 - MX}{\sigma}$, то получим:

$$F(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_0} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi(t_0)$$ - интеграл Лапласа.

В данном случае, нам необходимо найти вероятность того, что случайная величина больше некоторой границы:

$$p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\frac{(x - MX)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Вычислим вспомогательный параметр *t*, как показано выше:

```
(%i30) t:(140000-125000)/25000;
```

$$\text{(\%o30)} \quad \frac{3}{5}$$

Используя функцию integrate, вычислим вероятность того, что случайная величина будет ограничена сверху:

```
(%i31) integrate(exp(-x^2/2)/sqrt(2*%pi),x,-inf,t);
```

$$\text{(\%o31)} \quad \frac{\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\%pi}\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{10}\right)}{2} + \dfrac{\sqrt{\%pi}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\sqrt{\%pi}}$$

```
(%i32) float(%);
(%o32) 0.72574688224993
```

Последний шаг – вычисление искомой вероятности:

```
(%i33) 1-%;
(%o33) 0.27425311775007
```

5. Задачи экономического моделирования

Задача 5.1. Система массового обслуживания.

В цехе имеется два станка для обработки корпусных деталей. Интенсивность поступления деталей на обработку равна λ=6 дет/час, а интенсивность обработки деталей каждым станком равна μ=4 дет/час. Нарисовать графы состояний и вычислить: коэффициент использования оборудования, среднее число занятых станков, среднее число деталей в очереди, среднее время пребывания детали в цехе, вероятности состояний, если:

а) имеется накопитель на две детали;

б) емкость накопителя не ограничена.

Решение.

На рис. 31 и рис. 32 представлены диаграммы состояний для первого и второго случаев соответственно.

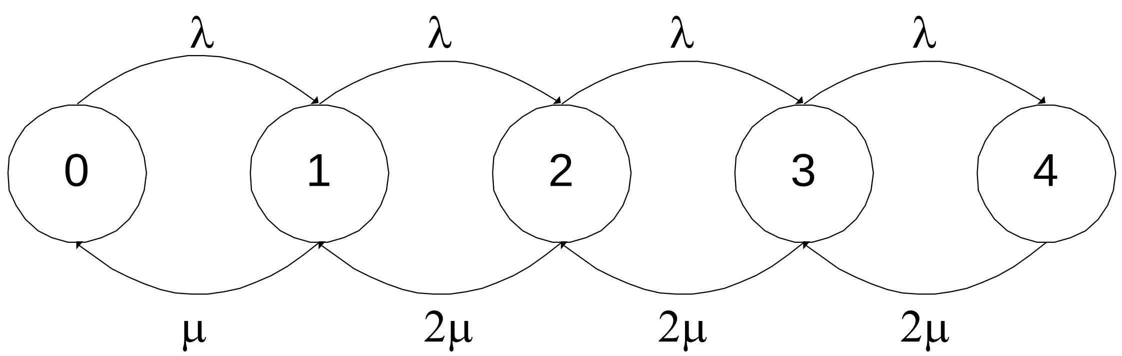


Рис. 31. СМО с очередью (накопителем) на две заявки (детали) и двумя обслуживающими аппаратами (станками)

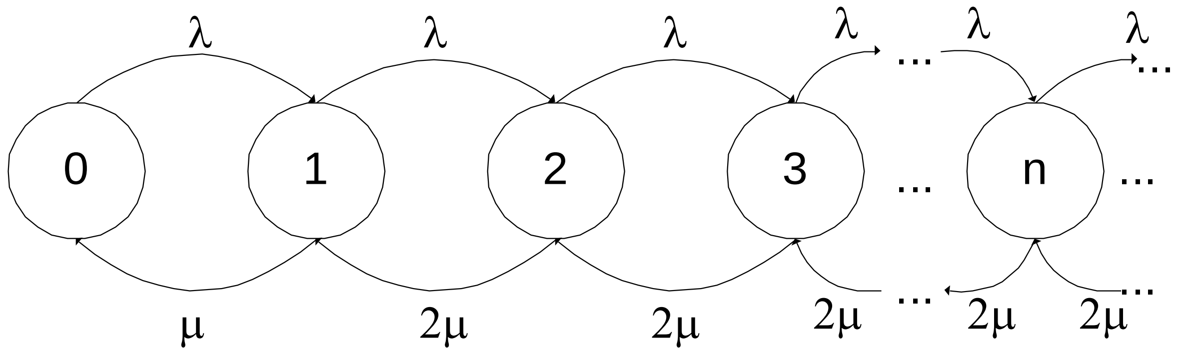


Рис. 32. СМО с неограниченной очередью (накопителем) и двумя обслуживающими аппаратами (станками)

1). Накопитель с ограниченной емкостью.

В соответствии с общей теорией имеем: $p_i = p_{i-1}\dfrac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$.

Так как у нас два станка и две позиции в накопителе, то интенсивность поступления: $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$; $\lambda_i = 0\ \ \forall i > 4$.

Это следует из того, что интенсивность поступления деталей на обслуживание постоянна, но если заняты оба станка и оба места в накопителе, то детали не поступают в систему.

Интенсивность обслуживания:

$\mu_1 = \mu$; $\mu_2 = 2\mu$; $\mu_3 = 2\mu$; $\mu_4 = 2\mu$; $\mu_5 = \ldots = 0$.

Это объясняется тем, что интенсивность обслуживания кратно количеству занятых одновременно станков. Если деталь одна, то $\mu_1 = \mu$, если деталей больше, то $\mu_i = 2\mu$, т.к. станков всего два и на обслуживании одновременно может быть не более двух деталей.

Далее имеем:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu};\ p_1 = p_0\rho,\ p_2 = \frac{1}{2}p_0\rho^2,\ p_3 = \frac{1}{2^2}\rho^3,\ p_4 = \frac{1}{2^3}\rho^4.$$

Сумма всех вероятностей (в том числе и p_0) равна 1, т.е.

$$p_0 \cdot \left(1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2^2}\rho^3 + \frac{1}{2^3}\rho^4\right) = 1.$$

Отсюда: $p_0 = \dfrac{1}{1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2^2}\rho^3 + \frac{1}{2^3}\rho^4}$.

Вычислим это в Maxima.

```
(%i13) Lambda:6;
(%o13) 6
```

```
(%i14) Mu:4;
(%o14) 4
(%i15) Ro:Lambda/Mu;
(%o15) 3/2
(%i22) X:1+sum(Ro^n/2^(n-1),n,1,4);
(%o22) 653/128
(%i23) p0:1/X;
(%o23) 128/653
(%i24) float(%);
(%o24) 0.19601837672282
```

Итак, p_0=0.196.

Подставляя это значение, вычислим остальные вероятности:

```
(%i25) p1:p0*Ro;
(%o25) 192/653
(%i26) p2:p1*Ro/2;
(%o26) 144/653
(%i27) p3:p2*Ro/2;
(%o27) 108/653
(%i28) p4:p3*Ro/2;
(%o28) 81/653
```

Число занятых станков: $N = p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 2p_4$.

```
(%i32) N:p1+2*(p2+p3+p4);
(%o32) 858/653
(%i33) float(%);
(%o33) 1.313935681470138
```

Итак, среднее число занятых станков равно N=1,314.

Число деталей в системе: $m = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4$

```
(%i34) m:sum(i*p0*Ro^i/2^(i-1),i,1,4),float;
(%o34) 1.727411944869832
```

Число деталей в очереди: $K = p_3 + 2p_4$

```
(%i35) K:p3+2*p4,float;
(%o35) 0.41347626339969
```

Время пребывания в цехе равно: $T = \dfrac{m}{\lambda}$.

```
(%i36) T:m/Lambda;
(%o36) 0.28790199081164
```

2). В случае неограниченности емкости очереди

$\lambda_i = \lambda \ \ \forall i, \ \mu_i = 2\mu \ \ \forall i \geq 2, \ \mu_1 = \mu$.

Вероятности любого состояния не будут равны нулю. Условие нормировки здесь: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

Тогда $p(0) \cdot \left(1 + \rho + 2 \sum\limits_{i=2}^{\infty} \left(\dfrac{\rho}{2} \right)^i \right) = 1$

Вычислим необходимые величины:

```
(%i40) A:sum((Ro/2)^i,i,2,inf),simpsum;
(%o40) 9/4
(%i41) X:1+Ro+2*A;
(%o41) 7
(%i42) p0:1/X;
(%o42) 1/7
```

Исходя из общей теории, далее получаем:

Среднее число деталей в системе:

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p_i = p_0 \left(\rho + 2 \cdot \sum_{i=2}^{\infty} i \cdot \left(\frac{\rho}{2} \right)^i \right).$$

Последовательно вычисляем:

```
(%i43) X:sum(i*(Ro/2)^i,i,2,inf),simpsum;
```

(%o43) $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{i\, 3^i}{4^i}$

Вычисление не происходит. Определим тогда функцию:

```
(%i46) X(n):=sum(i*(Ro/2)^i,i,2,n),simpsum;
```

(%o46) $X(n) := sum\left(i\left(\frac{Ro}{2}\right)^i, i, 2, n\right)$

Вычислим несколько значений:

```
(%i50) X(10000); float(%);
```

(%o50)

$$\frac{11194528613450531040996489O174[5962\ digits]771050561137851289917173637617}{995069210084491648088576801547[5960\ digits]967392668087230804158515773 44}$$

```
(%i51)
(%o51) 11.25
(%i52) X(100),float;
(%o52) 11.24999999989994
```

Как видно, скорость сходимости ряда большая, возьмем его значение Y=11,25:

```
(%i55) Y:%o51;
(%o55) 11.25
```

Далее:

```
(%i56) m:p0*(Ro+2*Y);
(%o56) 3.428571428571428
```

Среднее число занятых станков: $N = 2 - 2p_0 - p_1$:

```
(%i57) N:2-2*p0-p0*Ro;
```

(%o57) $\frac{3}{2}$

Среднее число деталей в очереди: $K = m - N$:

```
(%i58) K:m-N;
(%o58) 1.928571428571428
```

Время пребывания в цехе равно: $T = \frac{m}{\lambda}$:

```
(%i59) T:m/Lambda;
(%o59) 0.5714285714285
```

Ответ:

а) p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 равны: 0.196, 0.294, 0.221, 0.165, 0.124;

число занятых станков N = 1.314;

число деталей в системе m = 1.727;

число деталей в очереди K = 0.413;

коэффициент использования (N/2)= 0.657;

время пребывания в цехе= 0.288.

б) p_0 равно: 0.143;

число занятых станков = 1.5;

число деталей в системе = 3.428;

число деталей в очереди = 1.929;

коэффициент использования = 0.75;

время пребывания в цехе = 0.571.

Литература

1. Математические методы и информационные технологии обработки и использования экономической информации: Монография / Под. ред. С.В. Юдина – Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. – 477 с. – Илл.
2. Стахин Н.А. Основы работы с системой аналитических (символьных вычислений Maxima: Учебное пособие. – М.: 2008. – 86 с. - http://linux.armd.ru/common/img/uploaded/files/Maxima.pdf
3. Тарнавский Т. Система компьютерной алгебры Maxima - Linux Format, №№ 712, 2006.
4. Юдин С.В. Обеспечение навыков и умений в рамках стратегического подхода школы компетенций // Социально-экономическая и финансовая политика России в процессе перехода на инновационный путь развития / Материалы Международной научно-практической конференции, М., 22-23 апреля 2008 г. В 2-х т. – М.: ВЗФЭИ, 2009. – Т. 1. - С. 286-289
5. Интернет-ресурс Maxima - http://maxima.sourceforge.net