Методические материалы по дисциплине

«Информационные технологии в обучении математике»

Использование Microsoft Office Excel для решения математических задач

1. Построение графиков функций

1. Запустите табличный процессор *Microsoft Excel 2007*.
2. На первом листе рабочей книги необходимо построить график функции $y=sin(x)$ на отрезке [-6;6] с шагом 0,5 (рис. 32).
3. Выделите ячейки *A1:F1* и объедините их, используя кнопку  – *объединить и поместить в центре* на панели инструментов *Выравнивание* вкладки ленты *Главная*.
4. Введите в объединенные ячейки заголовок *Построение графиков функций*.
5. В ячейку *A3* введите *x*, а в ячейку *B3* – $y=sin(x)$.
6. В ячейку *A4* введите значение *- 6*, в *A5* – значение *-5,5*. Выделите эти две ячейки и наведите указатель мыши на правый нижний угол выделения – черный квадратик (*маркер заполнения*). После того, как указатель примет форму черного крестика, растяните область выделения до значения 6.
7. В ячейку *B4* введите формулу *=sin(A4)* и нажмите клавишу *Enter*.
8. Используя *маркер заполнения*, скопируйте формулу в остальные ячейки.
9. Выделите значения двух столбиков и выполните команду: вкладка ленты *Вставка* ► панель инструментов *Диаграммы* ► *Точечная*.

.

10. Приведите диаграмму к виду, представленному на рис. 32.

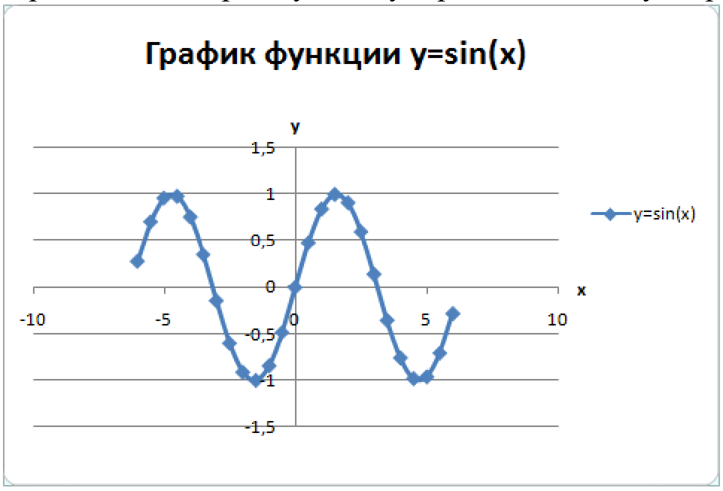


Рис. 1. График функции y=sin(x)

11. Переименуйте *Лист1* в *Графики функций*.

12. Постройте на этом же листе график функции:

$$y = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1;1] \\ |x| - 1, & x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

на отрезке [-3;3] с шагом 0,2 (рис. 33).

Для того чтобы записать функцию *y* воспользуемся логической функцией **ЕСЛИ**(Логическое выражение**;** значение_если истина; значение_если ложь).

Функция **ЕСЛИ** проверяет выполняется ли условие, и возвращает одно значение, если оно истинно и другое значение, если нет.

В нашем случае если $\boldsymbol{x \in [-1;1]}$, то $\boldsymbol{y = 1 - x^2}$, в противном случае $\boldsymbol{y = |x| - 1}$.

Чтобы записать условие $\boldsymbol{x \in [-1;1]}$ воспользуемся логической функцией

И(логическое выражение1; логическое выражение2; …).

В нашем случае получим И(C3 >= – 1;C3 <= 1).

Таким образом формула для нахождения значения функции будет выглядеть следующим образом:

=**ЕСЛИ**(**И**(C3 >= – 1;C3 <= 1); 1 – C3*C3; **ABS**(C3) – 1).

Для вычисления модуля используется функция **ABS**(число).

.

Рис. 2. График функции

Задания для самостоятельной работы

1. Постройте графики функций:

А) y = $|x^2+5x-10|$, [-10;5], шаг 0,5

В) $y = \begin{cases} \ln|x| + 5, x \le -1 \\ 5, x \in (-1;1) \\ \ln(x) + 5, x \ge 1 \end{cases}$, [-3;3], шаг 0,5.

2. Построить график квадратичной функции y=a(x-m)^2 +n. Значения коэффициентов a, m, n задаются в отдельных ячейках. Примерный вид графика


Построение графика квадратичной функции y=a(x-m)^2 +n

Коэффициенты функции

a=	1	m=	0	n=	-3

x	y
-5,0	22,0
-4,5	17,3
-4,0	13,0
-3,5	9,3
-3,0	6,0
-2,5	3,3
-2,0	1,0
-1,5	-0,8
-1,0	-2,0
-0,5	-2,8
0,0	-3,0
0,5	-2,8
1,0	-2,0
1,5	-0,8
2,0	1,0
2,5	3,3
3,0	6,0
3,5	9,3
4,0	13,0
4,5	17,3
5,0	22,0

.

2. Решение нелинейного уравнения с использованием инструмента Подбор параметра

Цель работы:

1. Научиться отделять корни нелинейного уравнения графически.
2. Освоить инструмент **Подбор параметра** для решения нелинейных уравнений с одной неизвестной.

Задание:

1. Найти все корни уравнения на отрезке [a, b], используя инструмент **Подбор параметра**.

2. Оформить созданный документ заголовками и поясняющими комментариями.

Варианты задания приведены в табл. 1.

Порядок выполнения (на примере уравнения $y = 1.8 \cdot (x + 0{,}5)^2 - \sin(10 \cdot x)$).

1. Запустите приложение **Excel**. Для выполнения работы используйте открывшуюся рабочую книгу.
2. Дважды щелкните на ярлычке текущего рабочего листа и дайте ему имя **Решение нелинейного уравнения**.
3. На первом этапе – **Локализация корней –** необходимо построить график искомой функции и по нему определить интервалы локализации корней. Для этого на рабочем листе создайте таблицу значений функции $y=f(x)$ на отрезке [–0,5; 0,5] с шагом изменения 0,1.
4. Постройте график функции $y=f(x)$ (тип - **График**).
5. Основываясь на данных таблицы и графика, выделите интервалы, на которых функция меняет знак. Это значит, что на каждом из них имеется корень. Для решаемого уравнения это интервалы [–0.4, –0.3], [0, 0.1] и [0.2, 0.3].

1. На втором этапе – **Уточнение корней –** на каждом из интервалов найти корень уравнения методом подбора параметра.

Для этого:

- выберите команду **СЕРВИС-Параметры**, на вкладке **Вычисления** установите относительную погрешность и предельное число итераций, равные 0,00001 и 1000 соответственно;
- введите в ячейки **F16**, **F17** и **F18** начальное приближение к корню на каждом отрезке (середину отрезка локализации корня), после применения Подбора параметра в этой ячейке будет находиться найденное приближенное значение корня (рис. 1.7);
- в ячейку **G16** запишите функцию, где вместо неизвестной *x* укажите ссылку на ячейку, отведенную под искомый корень (**F16**);
- скопируйте формулу в ячейки **G17** и **G18**, используя маркер автозаполнения;
- выберите команду **СЕРВИС-Подбор параметра;**

.

- в поле **Установить в ячейке** введите ссылку на ячейку **G16** (в которой введена формула);
- в поле **Значение** введите 0 (значение правой части уравнения);
- в поле **Изменяя значение ячейки** введите **F16** (ссылка на ячейку, отведенную под переменную), как показано на рис. 1.8;
- нажмите **OK**. На экране отображается окно **Результат подбора параметра** с результатами работы команды **Подбор параметра**. Найденное приближенное значение корня помещается в ячейку F16.
- аналогично найдите остальные корни.

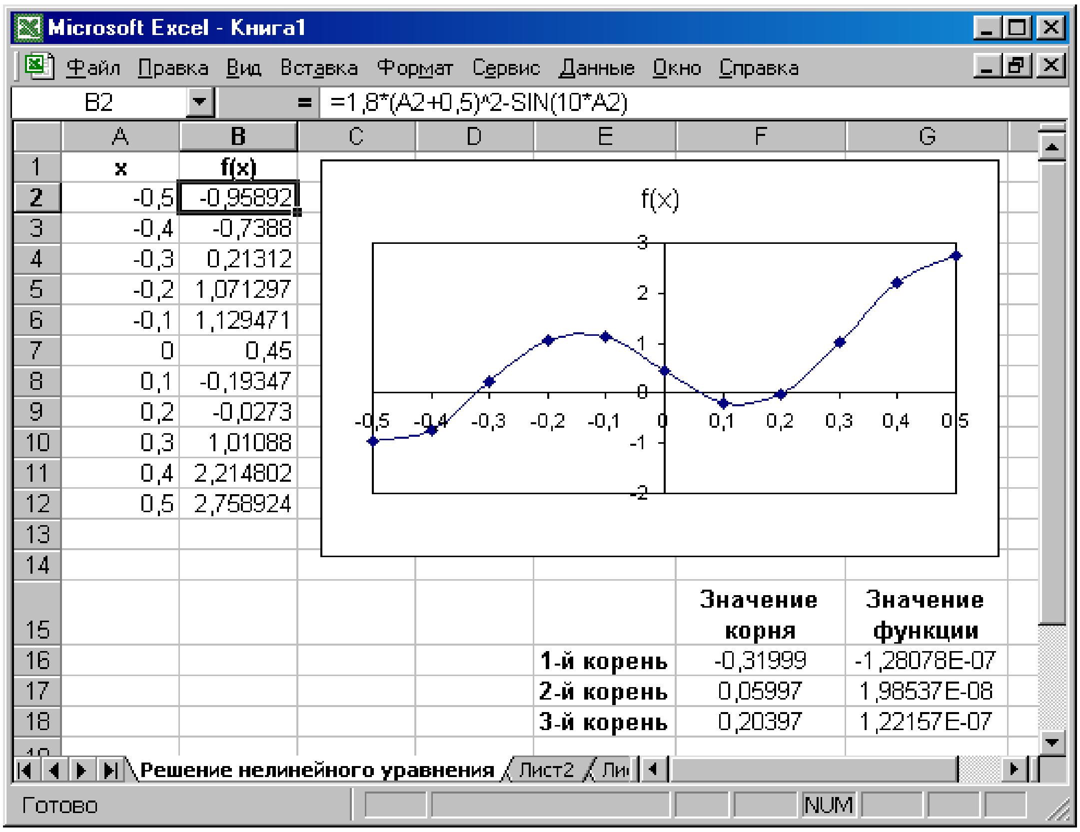


Рис. 1. Результаты решения нелинейного уравнения

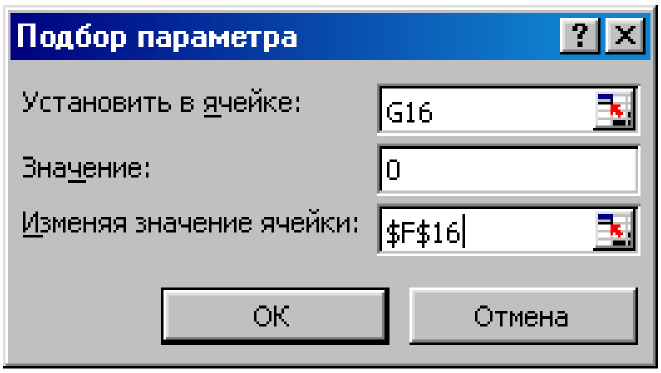


Рис. 2. Окно Подбор параметра

.

Таблица 1

№ вар.	Уравнение	№ вар.	Уравнение
1	$2^x - 5x - 3 = 0$	11	$3^x + 2x - 2 = 0$
2	$3x^4+4x^3-12x^2-5=0$	12	$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3=0$
3	$x^4 - x - 1=0$	13	$3^x - 2x - 5 = 0$
4	$5^x - 8x = 0$	14	$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2=0$
5	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10=0$	15	$x^4 - 18x^2 + 6=0$
6	$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17=0$	16	$2^x - 3x + 2 = 0$
7	$3^{x-1} + 2 - x = 0$	17	$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1=0$
8	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1=0$	18	$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1=0$
9	$5^x - 6x - 3 = 0$	19	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1=0$
10	$2x^4 - x^2 - 10=0$	20	$3^x - 5x - 2 = 0$

.

3. Решение систем линейных уравнений

I *Решение систем линейных уравнений методом Крамера.*

Пусть задана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляются по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,\ldots,n$$

Δ – определитель матрицы А,

Δ_i – определитель матрицы, полученный из матрицы А путем замены i-го столбца вектором b.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ & & & \ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & b_i & \ldots & a_{in} \\ & & & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Запишем в табличном процессоре Microsoft Office Excel 2007 матрицы, которые понадобятся нам при вычислениях.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		-5	2	3			1								
3	A=	1	2	-1		B=	-1								
4		-2	3	1			2								
5															
6															
7		1	2	3			-5	1	3			-5	2	1	
8	A_1=	-1	2	-1		A_2=	1	-1	-1		A_3=	1	2	-1	
9		2	3	1			-2	2	1			-2	3	2	
10															

Найдем определители Δ, Δ_1, Δ_2, и Δ_3, используя математическую функцию *МОПРЕД* .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		-5	2	3			1								
3	A=	1	2	-1		B=	-1								
4		-2	3	1			2								
5															
6															
7		1	2	3			-5	1	3			-5	2	1	
8	A_1=	-1	2	-1		A_2=	1	-1	-1		A_3=	1	2	-1	
9		2	3	1			-2	2	1			-2	3	2	
10															
11															
12	Δ=	-2													
13	Δ_1=	-18													
14	Δ_2=	-4													
15	Δ_3=	-28													
16															

Корни уравнения найдем по формулам: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,...,n$

В результате всех вычислений должны получиться следующие данные:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2		-5	2	3			1							
3	A=	1	2	-1		B=	-1							
4		-2	3	1			2							
5														
6														
7		1	2	3			-5	1	3			-5	2	1
8	A_1=	-1	2	-1		A_2=	1	-1	-1		A_3=	1	2	-1
9		2	3	1			-2	2	1			-2	3	2
10														
11														
12	Δ=	-2												
13	Δ_1=	-18			x_1=	9								
14	Δ_2=	-4			x_2=	2								
15	Δ_3=	-28			x_3=	14								

II *Решение систем линейных уравнений матричным методом*

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Эту систему можно представить в матричном виде: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Умножим систему линейных алгебраических уравнений $A \cdot X = B$ слева на матрицу, обратную к A. Тогда система уравнений примет вид:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Так как $A^{-1} \cdot A = E$ (единичная матрица), то получим $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Запишем в табличном процессоре матрицу *A* и столбец свободных членов *B* (рис. 46).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		-5	2	3			1	
3	A=	1	2	-1		B=	-1	
4		-2	3	1			2	
5								
6								
7								
8								
9	A^{-1}=							
10								
11								

Рис. 3. Исходные данные

Нам необходимо найти обратную матрицу A^{-1}, для этого:

1. выделите диапазон ячеек *B8:D10*;
2. вызовите функцию *МОБР*;
3. в появившемся диалоговом окне заполните поле ввода *Матрица*. Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица, то есть *B2:D4*, нажмите кнопку ОК;
4. В первой ячейке выделенного диапазона появиться некоторое число. Чтобы получить всю обратную матрицу, необходимо нажать клавишу *F2*, для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши *Ctrl+Shift+Enter* .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		-5	2	3			1	
3	A=	1	2	-1		B=	-1	
4		-2	3	1			2	
5								
6								
7								
8		-3	-4	4				
9	A^{-1}=	-1	-1	1				
10		-4	-6	6				
11								

Осталось найти вектор неизвестных по формуле $X=A^{-1}\cdot B$, для этого:

1. выделите диапазон ячеек *G8:G10*;
2. вызовите функцию *МУМНОЖ*;
3. в поле для первой матрицы укажите диапазон *B8:D10*;
4. в поле для второй матрицы укажите диапазон *G2:G4*;
5. нажмите кнопку *ОК*.

В результате должны получиться следующие значения:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		-5	2	3			1	
3	A=	1	2	-1		B=	-1	
4		-2	3	1			2	
5								
6								
7								
8		-3	-4	4			9	
9	A^{-1}=	-1	-1	1		X=	2	
10		-4	-6	6			14	
11								

Самостоятельно сделайте проверку, для этого умножьте матрицу *A* на *X*. В результате должен получиться столбец *B*.

Задания для самостоятельной работы

Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

a) методом Крамера;

b) с помощью обратной матрицы.

Сделайте проверку.

4. Решение задач оптимизации

Задачи оптимизации занимают очень важное место в бизнесе, производстве, прогнозировании. Условно эти задачи можно разделить на следующие категории:

- транспортная задача – минимизация расходов на транспортировку товаров;
- задача о назначениях – составление штатного расписания с минимизацией денежных затрат на заработную плату или времени выполнения работ;
- задачи оптимизации производства – максимизация выпуска товаров при ограничениях на сырье для производства этих товаров.

Прежде, чем искать оптимальное решение задачи необходимо построить ее математическую модель, т.е. осуществить перевод условия и решения на четкий язык математических отношений.

Задача оптимизации в общем виде формулируется следующим образом.

Найти значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, такие, что целевая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ примет максимальное, минимальное или заданное значения при ограничениях вида $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Таким образом, задача оптимизации содержит три основных компонента:

- *переменные* $x_1, x_2, \dots, x_n$ – определяемые величины;
- *целевая функция* – это цель, записанная математически в виде функции от переменных, принимающая максимальное, минимальное или заданное значения;
- *ограничения* – условия или соотношения, которым должны удовлетворять переменные.

MS Excel предоставляет возможность решения оптимизационных задач с помощью надстройки *Поиск решения*. При этом после создания математической модели на рабочем листе Excel создается табличная модель, где в отдельных ячейках содержаться переменные решения, в отдельные ячейки записаны формулы, по которым будут вычисляться целевая функция и функции ограничений.

Продемонстрируем эту возможность на примере решения следующей транспортной задачи.

Пример 1. Компания «Атлант» хранит свою продукцию на трех складах (первом, втором и третьем), расположенных в разных частях города. На этих складах хранится продукция в количествах 1000, 3000 и 2500 штук соответственно. Продукцию необходимо доставить четырем оптовым покупателям «Урал», «Купец», «Гелиос» и «Меркурий» с минимальными затратами, заявки которых составляют 1300, 800, 2700 и 1700 штук соответственно. Склады оптовых покупателей также расположены в разных частях города. Стоимости (в рублях) доставки одной штуки продукции со складов компании на склады покупателей показаны в следующей таблице.

Склады компании	Оптовые покупатели			
	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»
№1	50	150	60	75
№2	100	30	100	40
№3	70	180	210	120

1. Построим математическую модель задачи: определим переменные, целевую функцию и ограничения.

   Пусть:

   - x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} – количество продукции, перевозимой со складов компании на соответствующие склады покупателей;
   - $z=50\ x_{11} + 150\ x_{12} + 60\ x_{13} + 75\ x_{14} + 100\ x_{21} + 30\ x_{22} +100\ x_{23} +40\ x_{24}+ +70x_{31}+180\ x_{32} + 210\ x_{33} + 120\ x_{34}$ – целевая функция, общая стоимость доставки грузов покупателям;
   - $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}=1000,$
     $x_{21} + x_{22} +x_{23} +x_{24}=3000,$
     $x_{31}+x_{32} + x_{33} + x_{34}=2500$ – ограничения для складов компании;
   - $x_{11}+ x_{21} + x_{31}=1300,$
     $x_{12} + x_{22} + x_{32}=800,$
     $x_{13} + x_{23} + x_{33}=2700,$
     $x_{14}+ x_{24}+ x_{34}=1700$ – ограничения для складов покупателей.
2. Имеем сбалансированную транспортную задачу, так как спрос покупателей (1300+800+2700+1700=6500) равен предложению производителей (1000+3000+2500=6500).
3. Запустите табличный процессор MS Excel. Переименуйте *Лист 1* в *Сбалансированная модель*.
4. Составьте табличную модель Excel (рис. 49).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Стоимость доставки ед. продукции							
2		Покупатели							
3	Склады	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»				
4	№1	50	150	60	75				
5	№2	100	30	100	40				
6	№3	70	180	210	120				
7									
8									
9		Перевозки (кол-во продукции)							
10									
11		Покупатели				Всего	Имеется на складе		
12	Склады	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»				
13	№1	1	1	1	1	4	= 1000		
14	№2	1	1	1	1	4	= 3000		
15	№3	1	1	1	1	4	= 2500		
16									
17	Всего	3	3	3	3				
18	Необходимо	= 1300	= 800	= 2700	= 1700				
19									
20		Затраты на перевозки							
21									
22		Покупатели							
23	Склады	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»	Всего			
24	№1	50	150	60	75	335			
25	№2	100	30	100	40	270			
26	№3	70	180	210	120	580			
27									
28	Всего	220	360	370	235	1185	Целевая функция		

Рис. 4. Сбалансированная модель

5. Последняя таблица не обязательна. Целевую функцию можно было вычислить по формуле:
6. =СУММПРОИЗВ(B4:E6;B13:E15).
7. Выделите целевую ячейку и запустите надстройку *Поиск решения (Данные* ▸ *Анализ* ▸ *Поиск решения)*.
8. В появившемся диалоговом окне *Поиск решения* укажите адреса целевой ячейки, диапазон изменяемых ячеек и ограничения (рис. 50). Целевую ячейку установите равной минимальному значению.

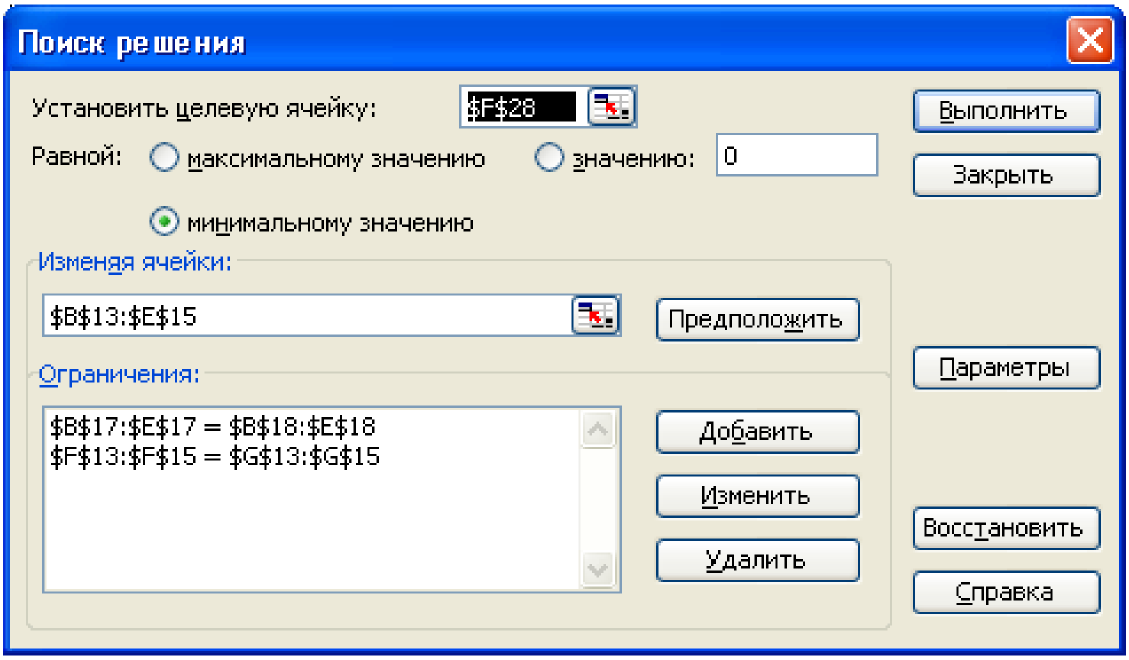
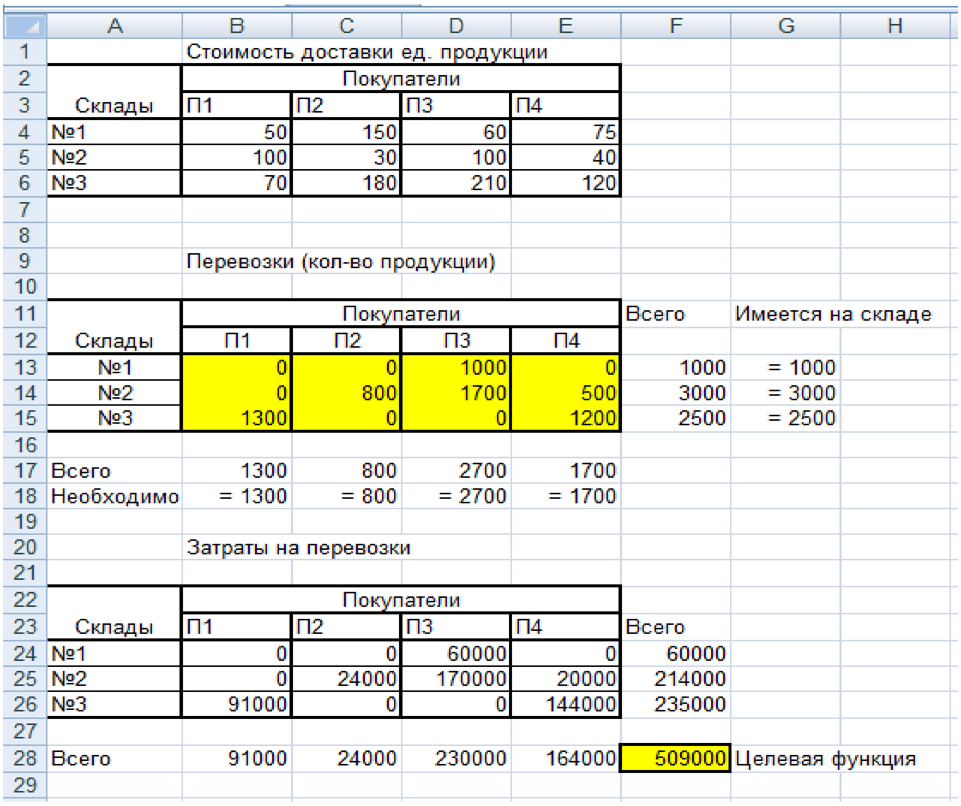


Рис. 5. Диалоговое окно «Поиск решения»

9. В диалоговом окне параметры *Поиска решения* установите флажки *Линейная модель, Неотрицательные значения* и *Автоматическое масштабирование.*

10. В диалоговом окне *Поиск решения* нажмите кнопку *Выполнить*.

11. Получаем оптимальное решение задачи (рис. 51).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимость доставки ед. продукции						
2		Покупатели						
3	Склады	П1	П2	П3	П4			
4	№1	50	150	60	75			
5	№2	100	30	100	40			
6	№3	70	180	210	120			
7								
8								
9		Перевозки (кол-во продукции)						
10								
11		Покупатели				Всего	Имеется на складе	
12	Склады	П1	П2	П3	П4			
13	№1	0	0	1000	0	1000	= 1000	
14	№2	0	800	1700	500	3000	= 3000	
15	№3	1300	0	0	1200	2500	= 2500	
16								
17	Всего	1300	800	2700	1700			
18	Необходимо	= 1300	= 800	= 2700	= 1700			
19								
20		Затраты на перевозки						
21								
22		Покупатели						
23	Склады	П1	П2	П3	П4	Всего		
24	№1	0	0	60000	0	60000		
25	№2	0	24000	170000	20000	214000		
26	№3	91000	0	0	144000	235000		
27								
28	Всего	91000	24000	230000	164000	509000	Целевая функция	
29								

Рис. 6. Оптимальное решение задачи

12. Скопируйте полученную табличную модель на *Лист 2* рабочей книги и переименуйте его в *Несбалансированная задача*.
13. Решим эту же задачу, немного изменив условие.
14. Пусть на складе №1 хранится не 1000 штук продукции, а 500. В таком случае на трех складах компании хранится 6000 штук продукции, покупатели по-прежнему заказывают 6500 штук. Перед нами транспортная задача с дефицитом.
15. Несбалансированная задача решается аналогично сбалансированной. Изменения коснуться только ограничений. Причем в ограничениях для складов покупателей знак «=» заменяется знаком « ≤ ».
16. После выполнения надстройки *Поиск решения* (рис. 52) получаем, что покупатель «Гелиос» недополучит 500 ед. продукции, а минимальные транспортные расходы составят 479 000 (рис. 53).

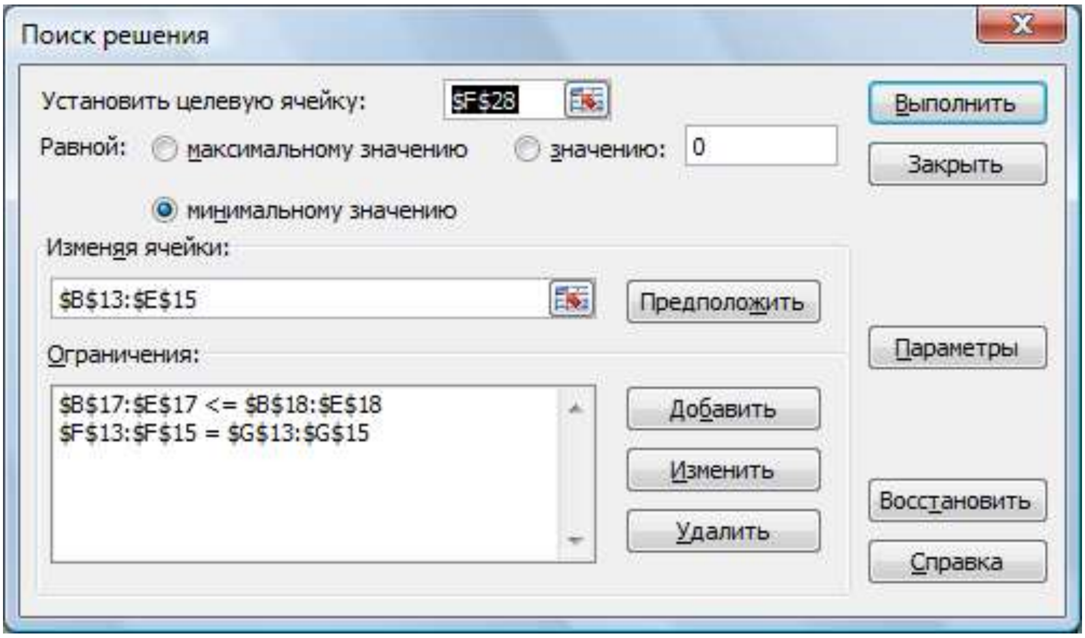


Рис. 7. Поиск решения

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимость доставки ед. продукции						
2		Покупатели						
3	Склады	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»			
4	№1	50	150	60	75			
5	№2	100	30	100	40			
6	№3	70	180	210	120			
7								
8								
9		Перевозки (кол-во продукции)						
10								
11		Покупатели				Всего	Имеется на складе	
12	Склады	"Урал"	"Купец"	"Гелиос"	"Меркурий"			
13	№1	0	0	500	0	500	= 500	
14	№2	0	800	1700	500	3000	= 3000	
15	№3	1300	0	0	1200	2500	= 2500	
16								
17	Всего	1300	800	2200	1700			
18	Необходимо	<= 1300	<= 800	<= 2700	<= 1700			
19								
20		Затраты на перевозки						
21								
22		Покупатели						
23	Склады	"Урал"	"Купец"	"Гелиос"	"Меркурий"	Всего		
24	№1	0	0	30000	0	30000		
25	№2	0	24000	170000	20000	214000		
26	№3	91000	0	0	144000	235000		
27								
28	Всего	91000	24000	200000	164000	479000	Целевая функция	
29								

Рис. 8. Оптимальное решение задачи

17. Покажите работу преподавателю.

Частным случаем транспортной задачи является *задача о назначениях*. В общем виде она формулируется следующим образом: имеется n различных работ и n рабочих. Известны стоимости выполнения каждого вида работ каждым работником. Необходимо так составить штатное расписание, чтобы все работы были выполнены, на выполнение каждой работы назначался только один работник, а затраты на заработную плату были минимальными. В данном случае задача является *сбалансированной*, так как количество работников равно количеству работ. Ограничения записываются в виде следующих равенств.

- $\mathbf{x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = 1,}$

  $\mathbf{x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = 1,}$

  …

  $\mathbf{x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} = 1}$ – ограничения для работников (каждый работник может выполнять только один вид работ).

- $\mathbf{x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = 1,}$

  $\mathbf{x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} = 1,}$

  …

  $\mathbf{x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{nn} = 1}$ – ограничения для работ (каждый вид работ может быть выполнен только одним работником).

.

x_{ij} – это двоичные переменные, которые могут принимать только два значения: 1, если работник i назначается на выполнение работы j и 0, если не назначается.

Решение задачи о назначениях рассмотрим на примере.

Пример 2. В лингвистическом центре работают 4 преподавателя по следующим направлениям: «Английский для начинающих», «Деловой английский», «Подготовка к ЕГЭ» и «Английский для путешествий». Стоимость академического часа работы каждого преподавателя по каждому курсу представлена в таблице. Составьте оптимальное распределение нагрузки среди сотрудников таким образом, чтобы все курсы были проведены, каждый преподаватель был занят только на одном виде работ, а затраты на заработную плату были минимальными.

№ п/п	ФИО преподавателя	Название курса			
		Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий
1	Королев Д. А.	100	300	110	250
2	Воробьева А. С.	120	180	100	150
3	Соловьев Н. А.	200	200	80	170
4	Павлова Р. Г.	300	250	150	230

1. Построим математическую модель задачи: определим переменные, целевую функцию и ограничения.

   Пусть:

   - $\mathbf{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}}$ – двоичные переменные, которые могут принимать два значения: 1, если преподаватель i назначается на чтение курса j и 0, если не назначается;
   - $\mathbf{z=100\ x_{11} + 300\ x_{12} + 110\ x_{13} + 250\ x_{14} + 120\ x_{21} + 180\ x_{22} +100\ x_{23} +150\ x_{24}+ +200\ x_{31}+200\ x_{32} + 80\ x_{33} + 170\ x_{34} +300\ x_{41}+250\ x_{42} + 150\ x_{43} + 230\ x_{44}}$ – целевая функция, общая стоимость работ;
   - $\mathbf{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}=1,}$
     $\mathbf{x_{21} + x_{22} +x_{23}+ x_{24}=1,}$
     $\mathbf{x_{31} + x_{32} +x_{33}+ x_{34}=1,}$
     $\mathbf{x_{41} + x_{42} +x_{43}+ x_{44}=1,}$
     $\mathbf{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}=1,}$
     $\mathbf{x_{21} + x_{22} +x_{23}+ x_{24}=1,}$
     $\mathbf{x_{13} + x_{23} +x_{33}+ x_{43}=1,}$
     $\mathbf{x_{14} + x_{24} +x_{34}+ x_{44}=1}$ – ограничения (каждый преподаватель может быть задействован на чтении только одного курса и каждый курс должен быть проведен).

2. На основе математической модели на рабочем листе Excel создадим табличную модель (рис. 54).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Стоимость академического часа работы преподавателей лингвистического центра						
3								
4	№ п/п	ФИО преподавателя	Название курса					
5			Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий		
6	1	Королев Д. А.	100	300	110	250		
7	2	Воробьева А. С.	120	180	100	150		
8	3	Соловьев Н. А.	200	200	80	170		
9	4	Павлова Р. Г.	300	250	150	230		
10								
11		Распределение нагрузки среди преподавателей						
12								
13	№ п/п	ФИО преподавателя	Название курса					
14			Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий	Всего	Необходимо
15	1	Королев Д. А.	1	1	1	1	4	= 1
16	2	Воробьева А. С.	1	1	1	1	4	= 1
17	3	Соловьев Н. А.	1	1	1	1	4	= 1
18	4	Павлова Р. Г.	1	1	1	1	4	= 1
19								
20		Всего	4	4	4	4		
21		Необходимо	= 1	= 1	= 1	= 1		
22					Целевая функция		2890	

Рис. 9. Задача о назначениях

3. Целевая функция в данном случае вычисляется по формуле =СУММПРОИЗВ(C6:F9;C15:F18).

4. Выделите целевую ячейку и запустите надстройку *Поиск решения (Данные ▸ Анализ ▸ Поиск решения).*

5. В появившемся диалоговом окне *Поиск решения* укажите адреса целевой ячейки, диапазон изменяемых ячеек и ограничения (рис. 55). Целевую ячейку установите равной минимальному значению. В диалоговом окне *Параметры поиска решения* установите флажки *Линейная модель и Автоматическое масштабирование.*

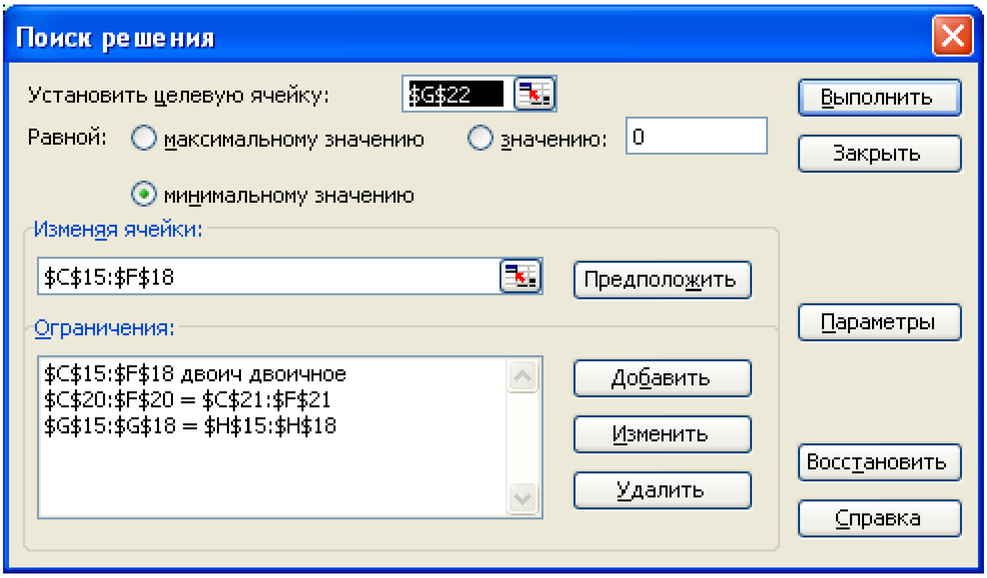


Рис. 10. Поиск решения

6. В диалоговом окне *Поиск решения* (рис. 55) нажмите кнопку *Выполнить*.

7. Получаем оптимальное решение задачи (рис. 56).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Стоимость академического часа работы преподавателей лингвистического центра						
3								
4			Название курса					
5	№ п/п	ФИО преподавателя	Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий		
6	1	Королев Д. А.	100	300	110	250		
7	2	Воробьева А. С.	120	180	100	150		
8	3	Соловьев Н. А.	200	200	80	170		
9	4	Павлова Р. Г.	300	250	150	230		
10								
11		Распределение нагрузки среди преподавателей						
12								
13			Название курса					
14	№ п/п	ФИО преподавателя	Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий	Всего	Необходимо
15	1	Королев Д. А.	1	0	0	0	1	= 1
16	2	Воробьева А. С.	0	0	0	1	1	= 1
17	3	Соловьев Н. А.	0	0	1	0	1	= 1
18	4	Павлова Р. Г.	0	1	0	0	1	= 1
19								
20		Всего	1	1	1	1		
21		Необходимо	= 1	= 1	= 1	= 1		
22					Целевая функция		580	
23								

Рис. 11. Оптимальное решение задачи

Индивидуальные задания

1. Фирма производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 м^2 досок, а для изделия модели В – 4 м^2. Фирма может получать от своих поставщиков до 1700 м^2 досок в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 12 минут машинного времени, а для изделия модели В – 30 минут. В неделю можно использовать 160 часов машинного времени. Каждое изделие модели А приносит 2 $ прибыли, а каждое изделие модели В – 4 $. Сколько изделий каждой модели следует выпускать фирме в неделю, чтобы получать максимальную прибыль?
2. Фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входят 3 фунта азотных, 4 фунта фосфорных и 1 фунт калийных удобрений, а в улучшенный – 2 фунта азотных, 6 фунтов фосфорных и 2 фунта калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется, по меньшей мере, 10 фунтов азотных, 20 фунтов фосфорных и 7 фунтов калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 $, а улучшенный – 4 $. Сколько и каких наборов удобрений надо купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?
3. Издательский дом «Живое слово» издаёт два журнала: «Следопыт» и «Путешественник», которые печатаются в трех типографиях: «Алмаз-Пресс», «Урал-Принт» и «Уникум-Пресс», где общее количество часов, отведенное для печати и производительность печати одной тысячи экземпляров, ограничены и представлены в следующей таблице:

Типография	Время печати одной тысячи экземпляров		Ресурс времени, отведенный типографией, час
	«Следопыт»	«Путешественник»	
Алмаз-Пресс	2	14	112
Урал-Принт	4	6	70
Уникум-Пресс	6	4	80
Оптовая цена, руб/шт	16	12	

Спрос на журнал «Следопыт» составляет 12 тысяч экземпляров, а на журнал «Путешественник» - не более 7,5 тысячи в месяц. Определите оптимальное количество издаваемых журналов, которое обеспечит максимальную выручку от продажи.

4. На кафедре работает 4 преподавателя-почасовика. Каждый из них может проводить определенные виды занятий. Почасовая оплата преподавателям по каждому виду работ представлена в таблице:

Преподаватели	Почасовая оплата курсов			
	Системный анализ	Информатика	Интеллектуальные информационные системы	Web-программирование
Алексеев И. М.	350	420	610	200
Ковалев Г. Н.	890	130	650	900
Семенова О. В.	430	520	600	720
Петров Г. П.	830	610	780	470

Составить план проведения учебных занятий так, чтобы все виды занятий были проведены, каждый преподаватель проводил занятия только по одному виду, а суммарная стоимость почасовой оплаты была минимальной.

5. Необходимо составить диету, состоящую из двух продуктов: А и В. Дневное питание этими продуктами должно давать не более 14 единиц жира, но и не менее 300 калорий. В одном килограмме продукта А содержится 15 единиц жира и 150 калорий, а в одном килограмме продукта В – 4 единицы жира и 200 калорий. При этом цена одного килограмма продукта А равна 15 $, а цена одного килограмма продукта В – 25 $. Какое количество продуктов в день необходимо употреблять для соблюдения диеты, чтобы вложенные средства были минимальными?

6. Компания хранит готовую продукцию на трех складах (первом, втором и третьем), расположенных в разных частях города. На этих складах хранится продукция в количествах 1000, 3000 и 2100 штук соответственно. Продукцию необходимо доставить четырем оптовым покупателям П1, П2, П3, П4 с минимальными затратами, заявки которых составляют 1300, 800, 2700 и 1700 штук соответственно. Склады оптовых покупателей также расположены в разных частях города. Стоимости (в рублях) доставки одной штуки продукции со складов компании на склады покупателей показаны в следующей таблице.

Склады компании	Оптовые покупатели			
	П1	П2	П3	П4
№1	50	150	60	75
№2	100	30	100	40
№3	70	180	210	120

7. Фабрика детских игрушек на одном сборочном участке собирает три вида игрушек: модели легкового автомобиля, гоночного автомобиля и грузовика. При сборке

каждого вида игрушки используется три вида операций (ручная сборка, «отверточная сборка» и проверка сборки). Ежедневный фонд рабочего времени на выполнение каждой операции ограничен величинами 490, 560 и 520 минут. Доход на одну игрушку каждого вида составляет соответственно 85, 100 и 125 руб. Время выполнения каждой операции в минутах, необходимое для сборки одной игрушки, показано в следующей таблице.

Операция	Модель легкового автомобиля	Модель гоночного автомобиля	Модель грузовика
Ручная сборка	2	3	3
«Отверточная» сборка	3	2	5
Проверка сборки	4	2	6

Количество производимых ежедневно моделей легковых автомобилей и грузовиков не должно быть меньше 20 и 15 штук соответственно.

Руководство фабрики решило добавить на этот сборочный участок производство новой игрушки, модели экскаватора, доходность которой прогнозируется на уровне 150 руб. Каждая модель экскаватора требует 3, 4 и 3минут выполнения операций трех видов. Фонд рабочего времени участка остается неизменным. Определите, выгодно ли фабрике начинать производство новых игрушек.

8. Завод производит электронные приборы трех видов (прибор А, прибор В и прибор С), используя при сборке микросхемы трех типов (тип 1, тип 2 и тип 3). Расход микросхем задается следующей таблицей.

Тип	Прибор А	Прибор В	Прибор С
1	2	1	1
2	1	1	4
3	2	2	1

Стоимость изготовленных приборов одинакова. Ежедневно на склад завода поступает 400 микросхем типа 1 и по 500 микросхем типов 2 и 3. Каково оптимальное соотношение дневного производства приборов различного вида, если производственные мощности завода позволяют использовать запас поступивших микросхем полностью. Решите эту же задачу, но с условием, что количество приборов каждого вида не должно быть меньше 90. Проанализируйте полученное решение.

9. Строительной фирме необходимо выполнить бетонные работы на четырех строящихся объектах. В фирме имеется 4 бригады бетонщиков, которые могут выполнить эту работу. Бригадиры каждой бригады побывали на объектах, оценили

объемы работ и рассчитали сроки, за которые они могут выполнить работы. Сроки (в рабочих днях) выполнения работ каждой бригадой приведены в следующей таблице.

Бригада	Объект			
	1	2	3	4
№1	30	40	50	60
№2	36	41	52	58
№3	28	44	49	57
№4	35	39	49	63

Распределите бригады по объектам таким образом, чтобы суммарный срок выполнения всех работ был минимальным.

10. Фирма производит два вида продукции: столы и стулья. Для изготовления одного стула требуется 3 кг древесины, а для изготовления одного стола – 7 кг. На изготовление одного стула уходит два часа рабочего времени, а на изготовление стола – 8 часов. Каждый стул приносит прибыль, равную 1 у. е., а каждый стол – 3 у. е. Сколько стульев и сколько столов должна изготовить эта фирма, если она располагает 420 кг древесины и 400 часами рабочего времени и хочет получить максимальную прибыль?
11. На ферме в качестве корма для животных используются два продукта - M и N. Сбалансированное питание предполагает, что каждое животное должно получать в день не менее 200 ккалорий, причем потребляемое при этом количество жира не должно превышать 14 единиц. Подсчитано, что в 1 кг каждого продукта содержится:

   - в продукте M - 150 ккалорий и 14 единиц жира;
   - в продукте N - 200 ккалорий и 4 единицы жира.

   Разработать максимально дешевый рацион откорма животных, отвечающий этим условиям, если стоимость 1 кг продукта M составляет 1,5 руб, а 1 кг продукта N - 2,3 руб.

12. На мебельной фабрике изготавливаются пять видов продукции: столы, шкафы, диван-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат ресурсов: труда, древесины и ткани на производство единицы продукции каждого вида приведены в следующей таблице:

Наименование ресурса	Расход ресурса на единицу продукции (в указанных единицах измерения)					Запас ресурса
	стол	шкаф	диван-кровать	кресло-кровать	тахта	
Трудозатраты (чел.-ч.)	4	8	12	9	10	3690
Древесина (м3)	0.4	0.6	0.3	0.2	0.3	432

Ткань (м)	0	0	6	4	5	2400
Прибыль от выпуска 1 изделия (у.е.)	8	10	16	13	17	-
Предельный объем выпуска (шт.)	480	80	180	120	100	-

В этой же таблице указаны запасы ресурсов, которые могут быть использованы в течение рабочего дня, величины прибыли (в условных единицах) от выпуска одного изделия каждого вида, а также заданы пределы объемов изготовления каждого вида продукции.

Требуется определить объемы производства продукции мебельной фабрикой в течение рабочего дня, гарантирующие ей максимальную прибыль.

13. На фабрике по производству микросхем четыре техника (A, B, C и D) производят три продукта (продукты 1, 2 и 3). Производитель микросхем может продать в этом месяце 80 единиц продукта 1, 50 единиц продукта 2 и, самое большее, 50 единиц продукта 3. Техник A может производить только продукты 1 и 3. Техник B может производить только продукты 1 и 2. Техник C может производить только продукт 3. Техник D может производить только продукт 2. Каждая произведенная единица продукта дает следующую прибыль: продукт 1: 6 руб.; продукт 2: 7 руб.; продукт 3: 10 руб. Время (в часах), требуемое каждому из техников для производства продукта, показано в следующей таблице.

Продукт	Техник A	Техник B	Техник C	Техник D
1	2	2,5	Не может	Не может
2	Не может	3	Не может	3,5
3	3	Не может	4	Не может

Каждый техник может работать до 120 часов в месяц. Как производитель микросхем может добиться максимальной ежемесячной прибыли?

14. Завод по производству компьютеров производит мыши, клавиатуры и джойстики для видеоигр. Прибыль на единицу продукта, трудозатраты на единицу продукта, ежемесячный спрос и машинное время на единицу продукта приведены в следующей таблице:

	Мышь	Клавиатура	Джойстик
Прибыль на единицу, руб.	8	11	9
Трудозатраты на единицу, час.	0,2	0,3	0,24

Машинное время на единицу, час.	0,04	0,055	0,04
Ежемесячный спрос, шт.	15 000	25 000	11 000

Каждый месяц суммарно доступно 13000 человеко-часов и 3000 часов машинного времени. Как производитель может получить максимальную прибыль от своей фабрики?

15. В хозяйстве имеются пять складов минеральных удобрений и четыре пункта, куда их необходимо доставить. Потребность каждого пункта в минеральных удобрениях различна, и запасы на каждом складе ограничены. Требуется определить, с какого склада, в какой пункт поставлять, сколько минеральных удобрений для минимизации грузооборота перевозок. Имеются следующие исходные данные.

Наличие минеральных удобрений на складах.

Склады	Наличие удобрений, т.
Склад №1	200
Склад №2	190
Склад №3	220
Склад №4	145
Склад №5	280

Потребность в минеральных удобрениях на различных пунктах.

Пункты	Потребность в удобрениях, т.
1 пункт	200
2 пункт	150
3 пункт	220
4 пункт	330

Расстояния между складами и пунктами доставки.

	Пункт 1	Пункт 2	Пункт 3	Пункт 4
Склад №1	6	4	5	11
Склад №2	12	6	4	9
Склад №3	15	7	10	4
Склад №4	9	5	12	5
Склад №5	3	7	12	11

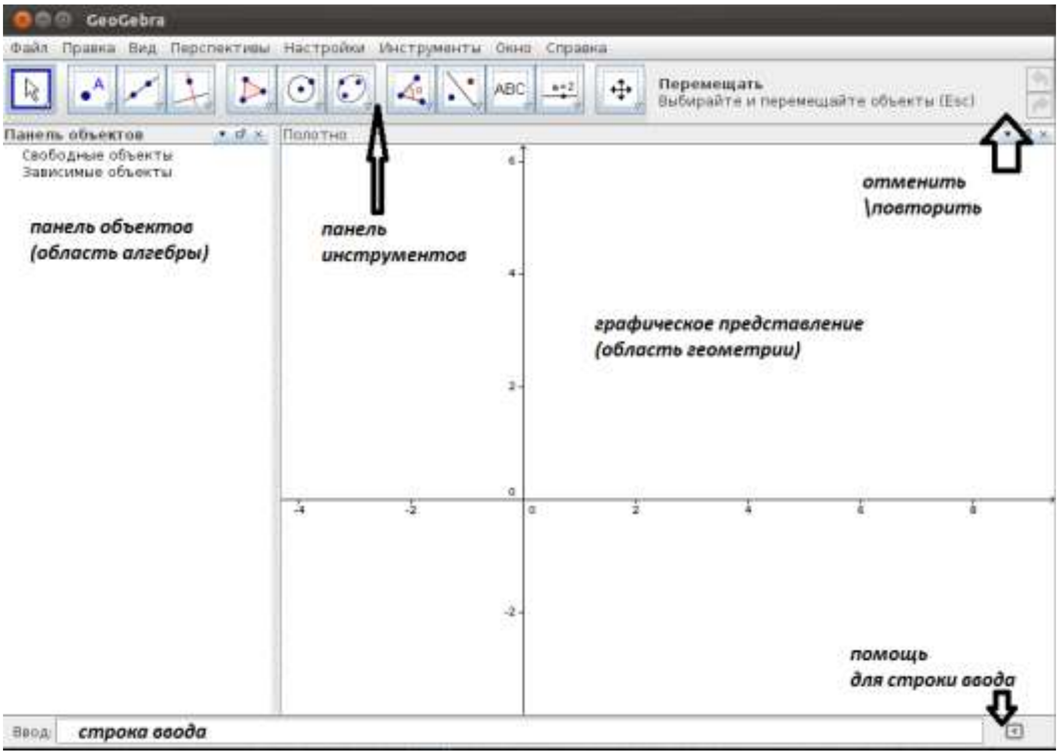
.

GeoGebra в обучении математике

1. Применение программы GeoGebra для построения чертежей геометрических задач.

Цель: Сформировать представление о возможностях программы GeoGebra при решении геометрических задач и задач аналитической геометрии.

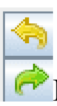
После запуска программы вы увидите следующее окно:



За счёт инструментов в панели инструментов Вы можете выполнять построения в графическом представлении (области геометрии) с помощью мышью. В то же самое время соответствующие координаты и уравнения будут показаны на панеле объектов (область алгебры).

Строка ввода используется для ввода координат, уравнений, команд и функций с клавиатуры; все эти объекты будут показаны в графическое представление и на панели объектов сразу после нажатия клавиши ENTER. В GeoGebra, геометрия и алгебра всегда вместе.

Подсказки:

Попробуйте использовать кнопки **Отменить/Повторить**

.

Для того, чтобы спрятать объект, нажмите правой кнопкой на него и уберите

галочку «**Показывать объект**»

Вы можете менять свойства объектов (цвет, тип линии и т. д.). Для этого

нажмите правой кнопкой мыши на объект и выберите «**Свойства**»

- Оси координат и сетка можно спрятать или показать используя вкладку «**Вид**» на панели меню. Также в этой вкладке можно менять видимость и

других полей.

Цвет, толщину, стиль линии, заливку фигуры можно изменить в меню **правка → свойства**.

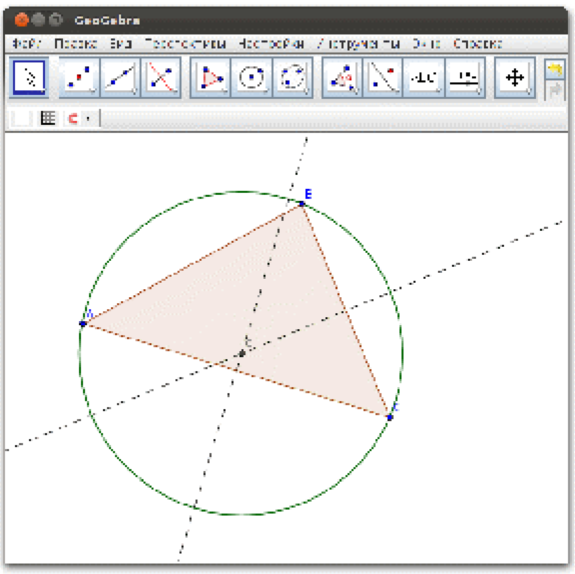
Если вы хотите изменить положение вашего чертежа в целом, используйте

инструмент «**Переместить чертёж**» и зажав левую кнопку мыши, вы сможете перемещать чертёж.

Зайдите **Вид → Протокол**. Вы откроете таблицу всех ваших построений. Используя кнопки навигации, вы сможете посмотреть все шаги построения. Кроме того, вы можете поменять некоторые шаги местами.

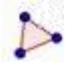
Задание 1. Изобразите окружность, описанную около треугольника (ее можно построить двумя способами).

Примечание: Построение треугольника ABC и описанной окружности с использованием GeoGebra.

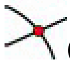


Первый способ построения с использованием мыши:

.

1. На панели инструментов выберите «**Многоугольник**» . Щёлкните левой кнопкой мыши три раза в разные места на графическое представление, у вас отметятся три точки A, B, C. Щёлкните левой кнопкой мыши в точку А и вы получите треугольник.

2. Выберите на панели инструментов «**Серединный перпендикуляр**»  (нажмите левой кнопкой мыши на небольшой треугольник в четвёртой иконке слева) и постройте два серединных перпендикуляра нажав на две стороны треугольника.

3. Выберите на панели инструментов «**Пересечение двух объектов**»  (вторая иконка слева). Нажмите на пересечение двух серединных

перпендикуляров или на каждый из перпендикуляров по очереди. Мы получим центр окружности.

4. Выберите «**Окружность по центру и точке**» . Нажмите на точку пересечения двух серединных перпендикуляров и вершину треугольника.

5. Выберите «**Перемещать**» на панели инструментов и используя мышь вы можете изменить треугольник, а вмести с ним будет изменяться и весь чертёж.

Второй способ построения с использованием строки ввода:

Наберите следующие команды в строку ввода внизу экрана и нажмите клавишу Enter после каждого ввода. То

1. A=(2,1)

2. B=(12,5)

3. C=(8,11)

4. Многоугольник[A,B,C]

5. s=СрединныйПерпендикуляр[a]

6. t=СрединныйПерпендикуляр[b]

7. O=Пересечение[s,t]

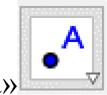
8. Окружность[O,A]

Проверка теорем о замечательных точках треугольника

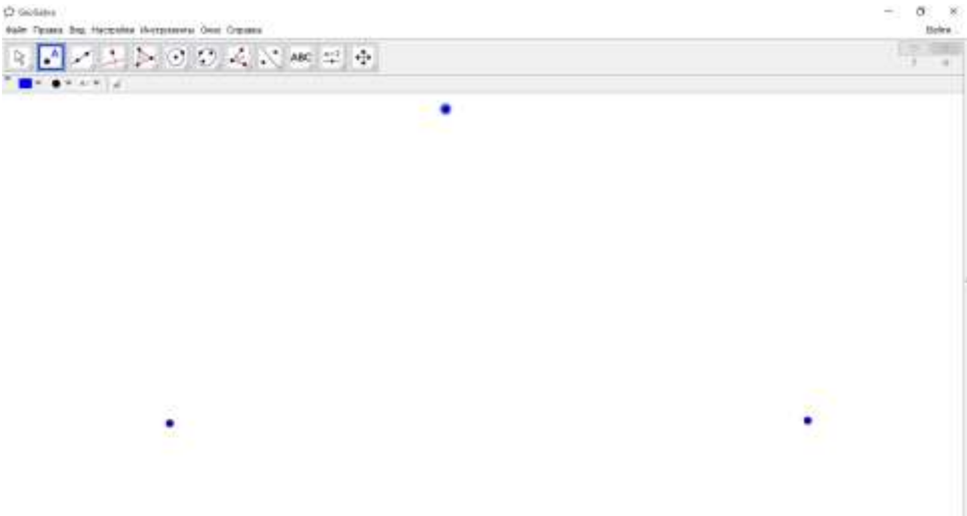
1. Точка пересечения биссектрис

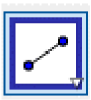
Теорема: Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка является центром окружности, вписанной в этот треугольник

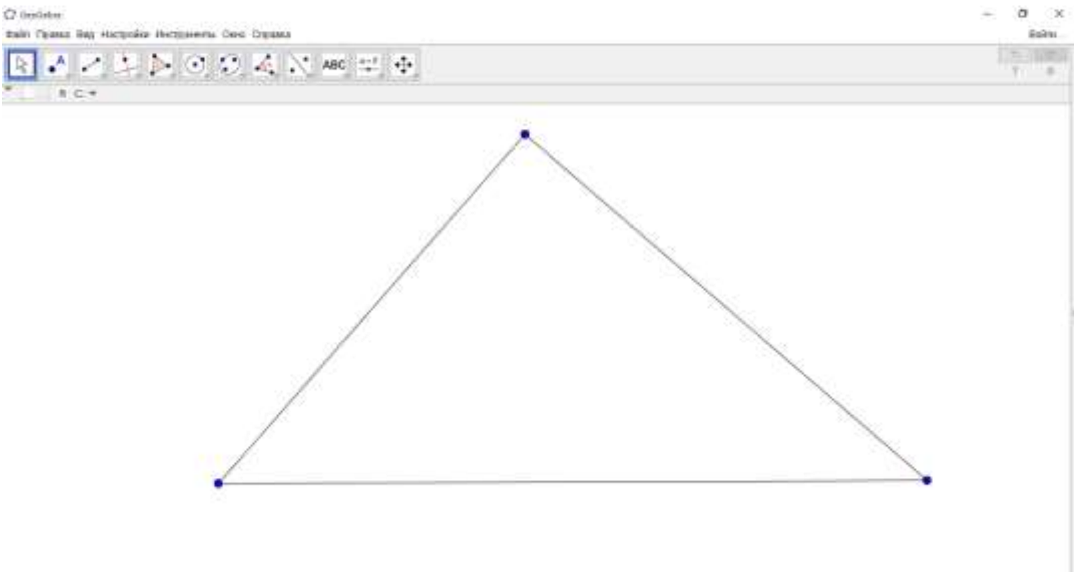
Выполнение:

1. Запустить программу GeoGebra.
2. Выбрать инструмент «Точка» 

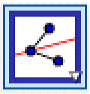
и отметить произвольным образом три точки на рабочем листе, причем точки не должны лежать на одной прямой.

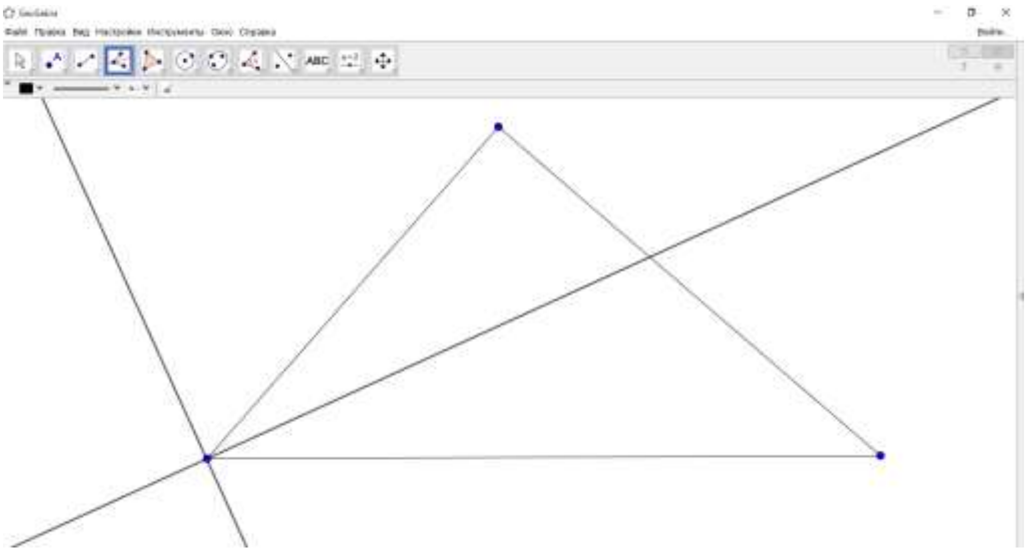


3. Используя инструмент «Отрезок»  попарно соединить три точки и получить треугольник

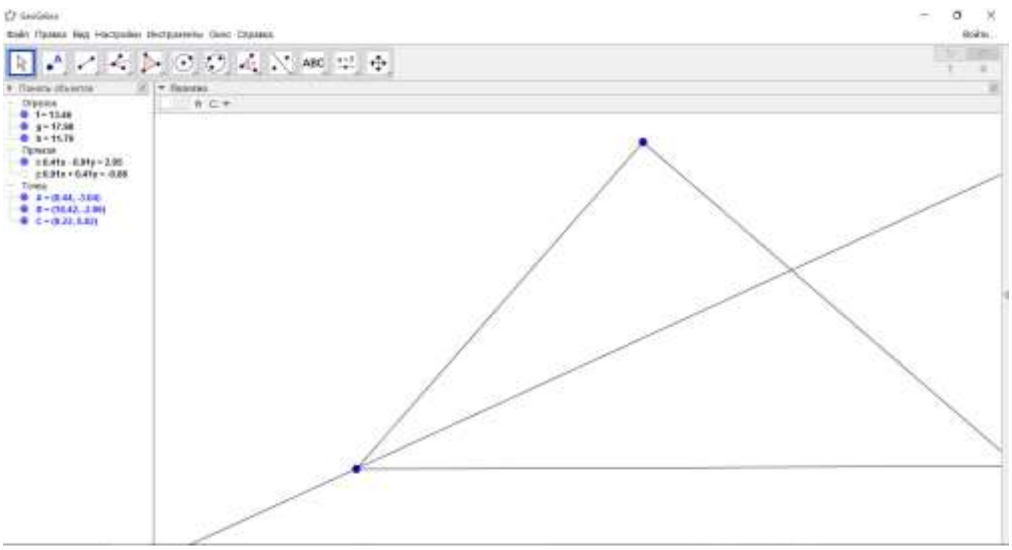


4. Теперь построим биссектрису одного любого угла треугольника. Стоит отметить особенность программы GeoGebra – биссектрисой является прямая, причем строится

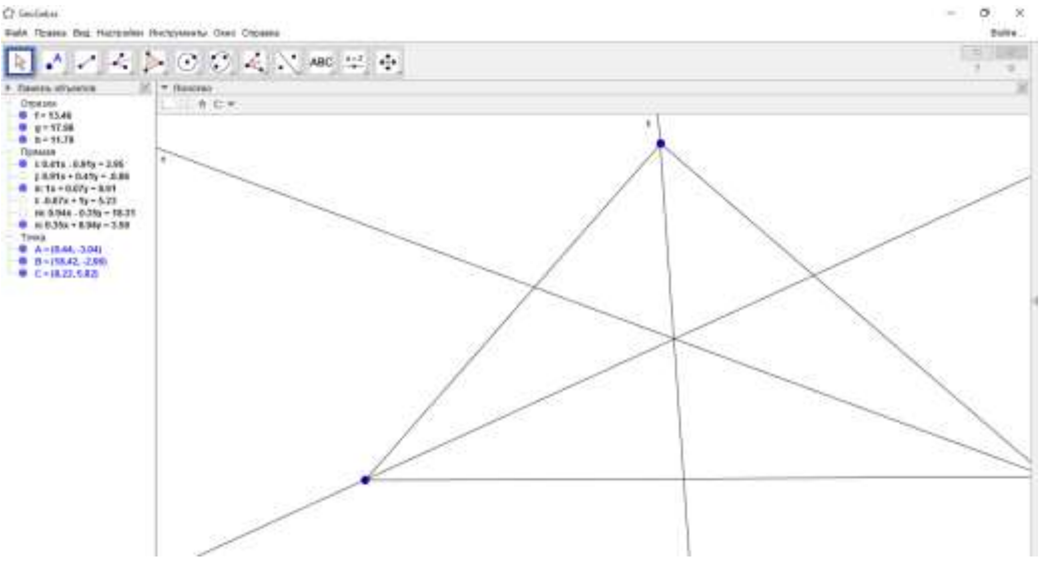
сразу 2 прямые – биссектриса внутреннего и внешнего углов. Для построения нужно выбрать инструмент «Биссектриса»  и указать по очереди в любом порядке две стороны угла или три точки в следующем порядке: точка на одной стороне, вершина угла, точка на второй стороне.

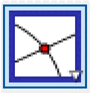


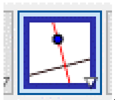
5. Так как биссектриса внешнего угла нам не интересна, сделаем та, чтобы она не отображалась. Для этого нужно сделать, чтобы была видна панель объектов и нажать на синий круг рядом с необходимым объектом, чтобы он не отображался на чертеже. Важно понимать, что при этом он не удалится, и что его в любой момент можно будет включить назад



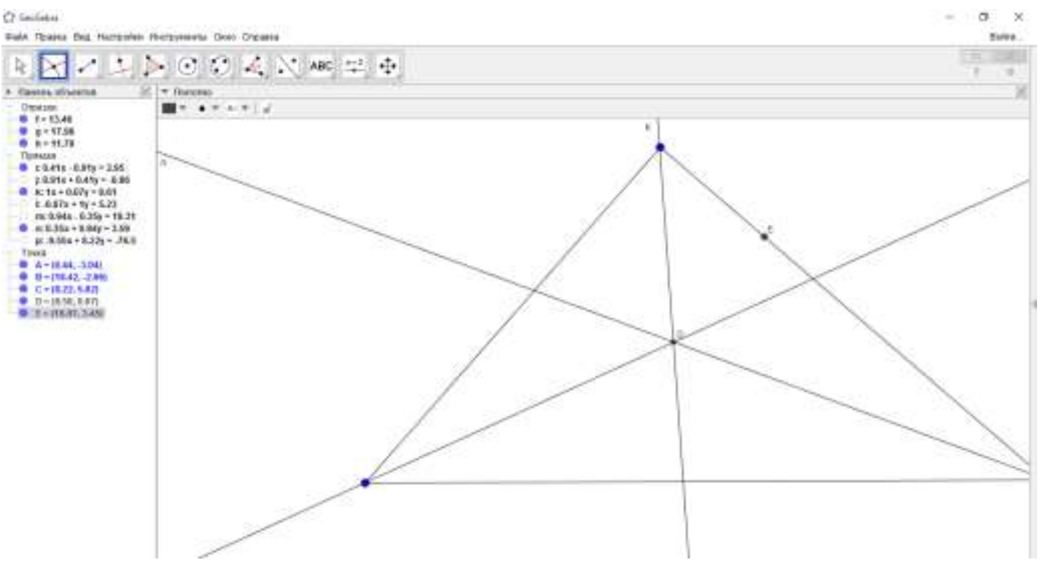
6. Построим аналогичным образом еще две биссектрисы других углов

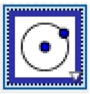


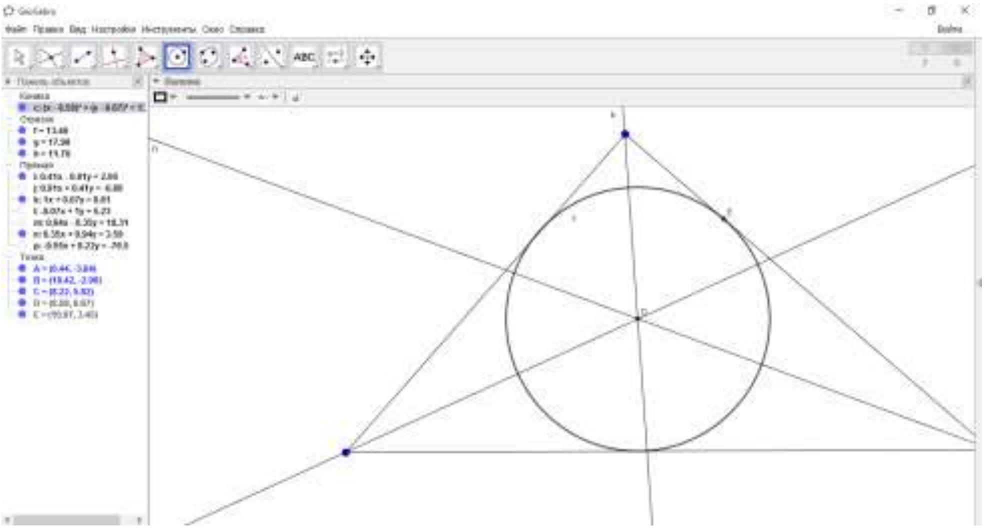
7. Видно, что они пересекаются в одной точке. Отметим её на чертеже с помощью инструмента «Пересечение», выбрав по очереди любые две биссектрисы.

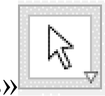
8. Найдем точку касания вписанной окружности любой стороны. Так как сторона для вписанной окружности является касательной, построим перпендикуляр из точки пересечения биссектрис к любой стороне. Для этого воспользуемся инструментом «Перпендикуляр». Выберем точку пересечения биссектрис и выберем любую сторону.

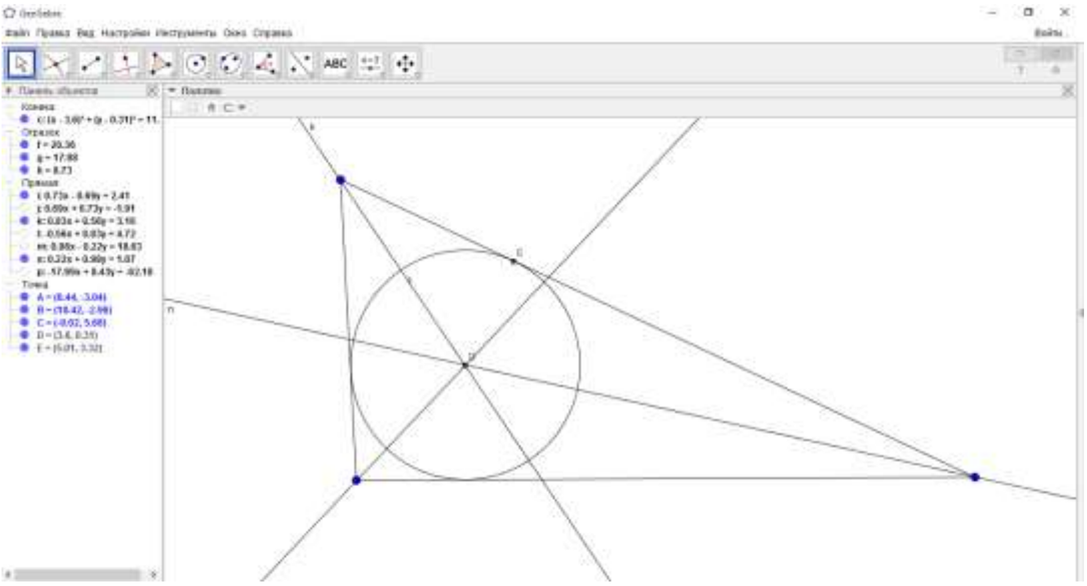
9. Инструментом «Пересечение» отметим точку пересечения стороны и перпендикуляра к этой стороне, затем сделаем эту прямую невидимой



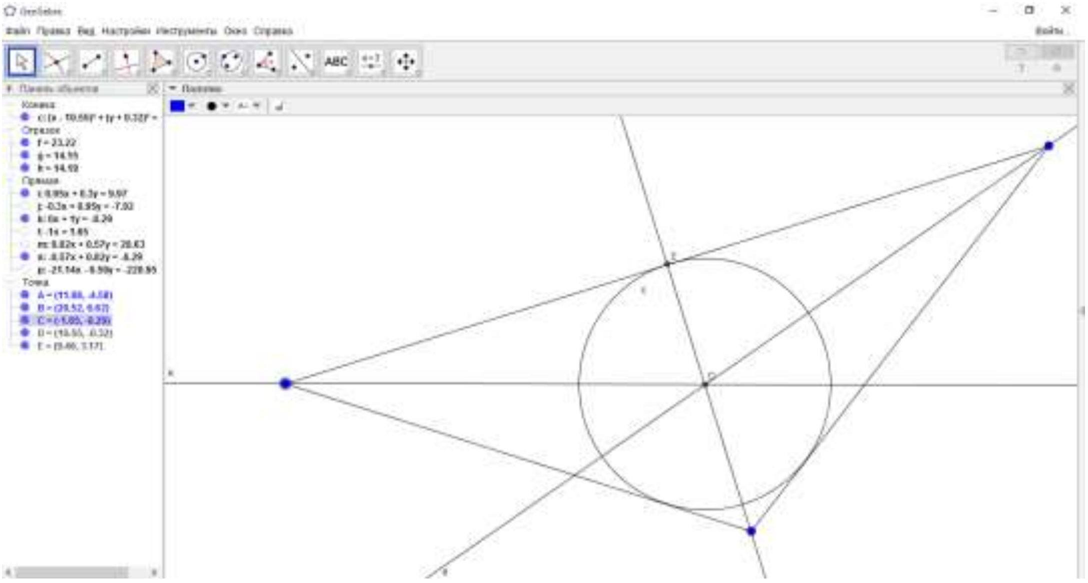
10. Построим окружность по центру и точке на этой окружности, воспользовавшись соответствующим инструментом 



11. Выберем инструмент «Перемещать»  и попробуем перемещать любую вершину треугольника. Заметим, что всегда три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник



.

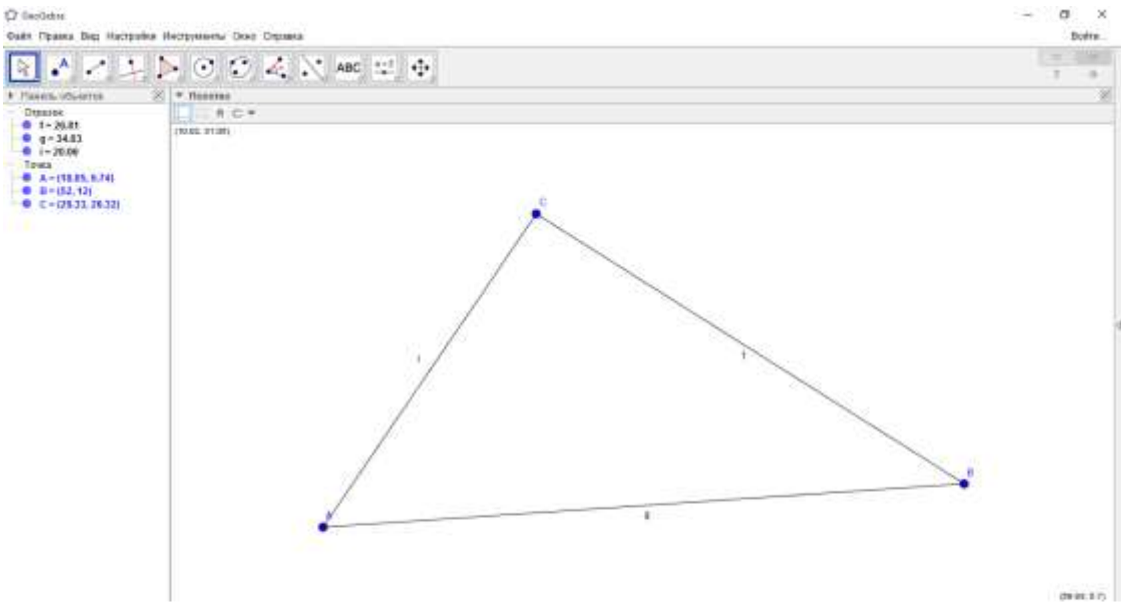


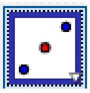
2. Точка пересечения медиан

Теорема: Все медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем, три медианы делят треугольник на шесть равновеликих тругольников.

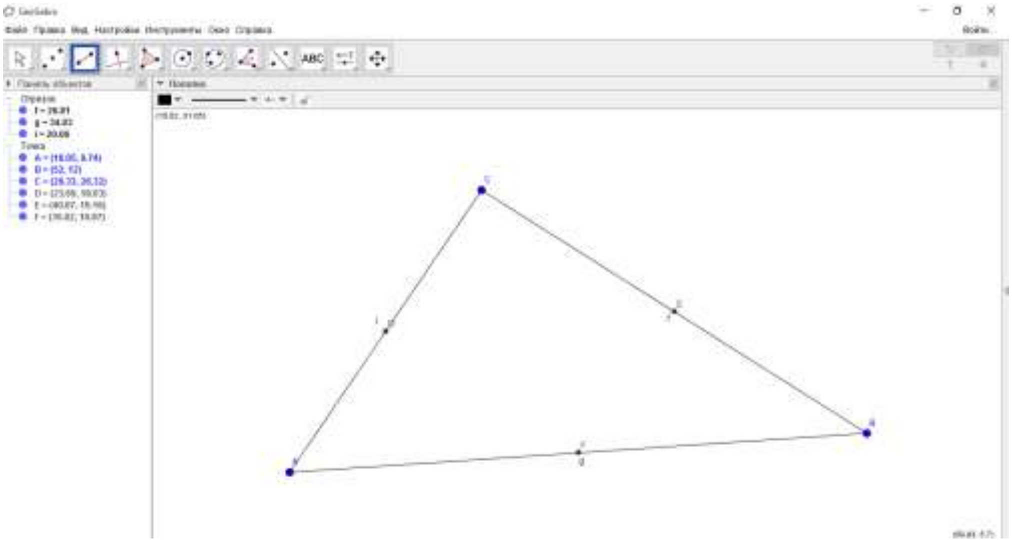
Выполнение:

1. Запустить программу GeoGebra.Отметить три произвольные точки, не лежащие на одной прямой и соединить их отрезками попарно.

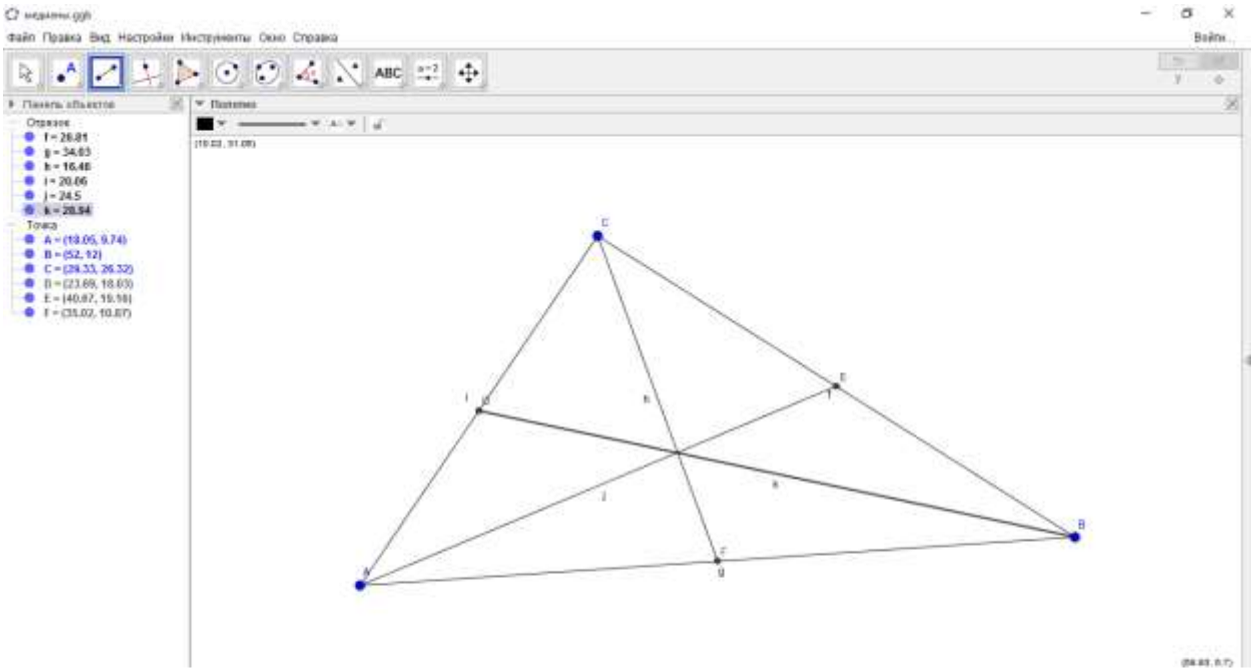


2. На каждой стороне отметить её середину. Для этого выбрать инструмент «Середина»  и нажать по очереди на два конца отрезка.

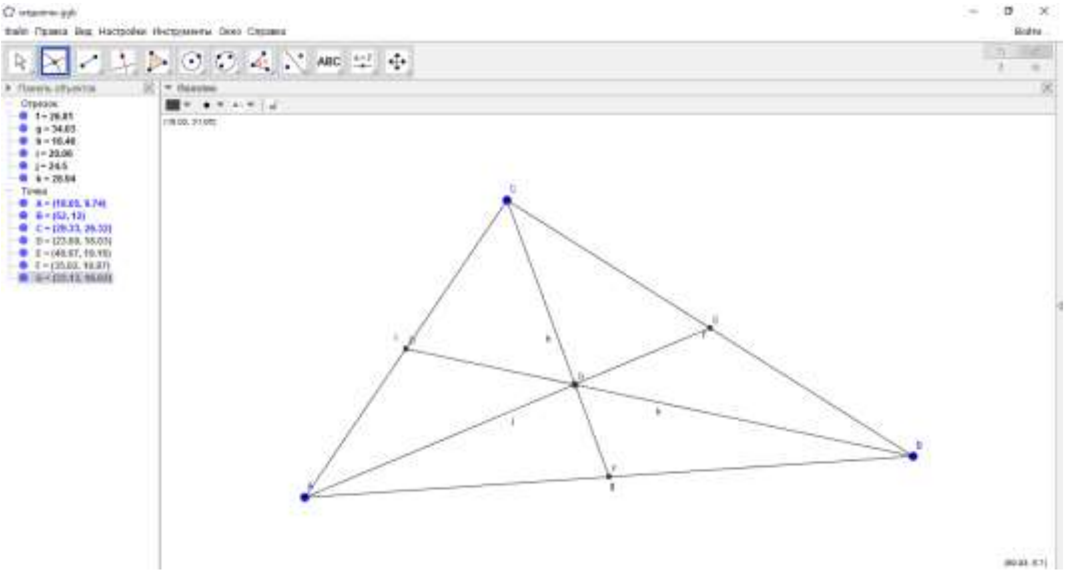
.

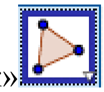


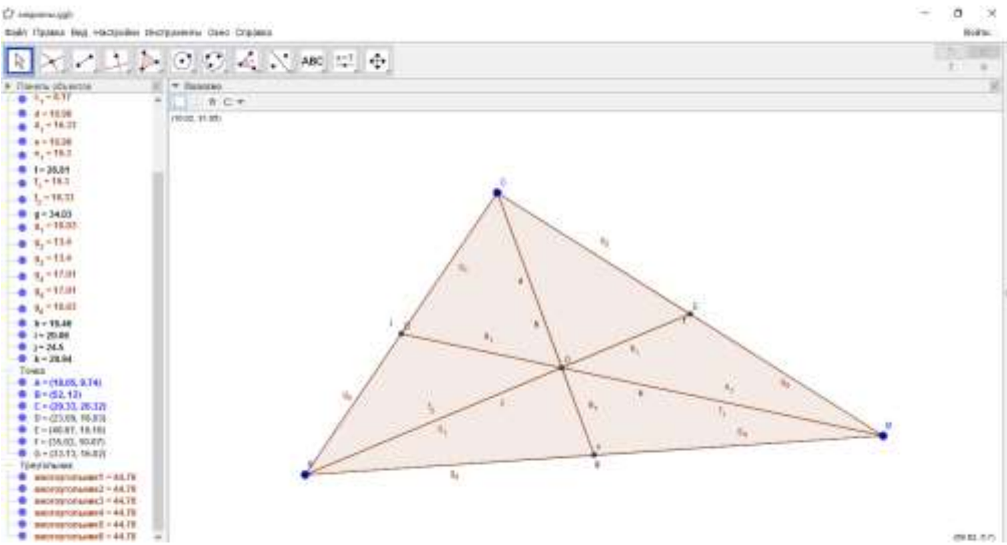
3. Соединить каждую вершину с серединой противоположной стороны с помощью инструмента «Отрезок»



4. Отметить с помощью инструмента «Пересечение» точку пересечения медиан.

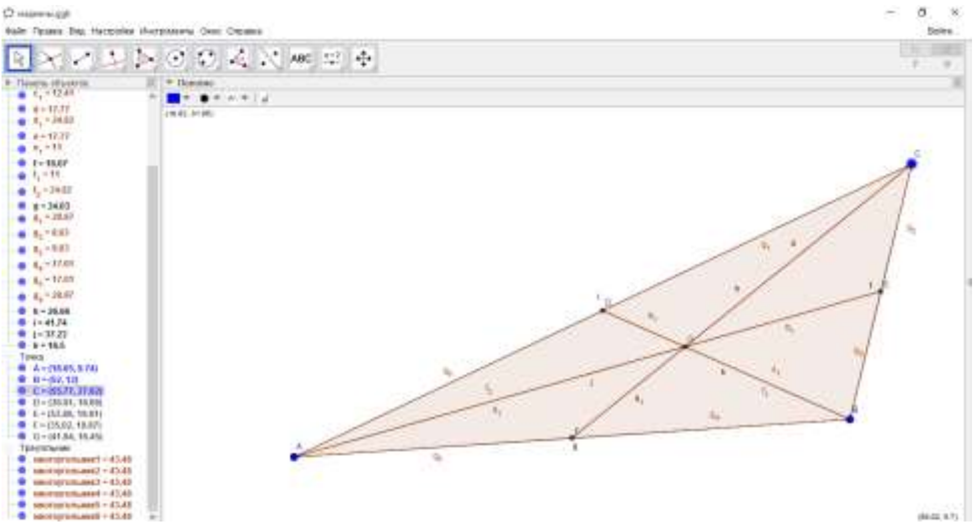


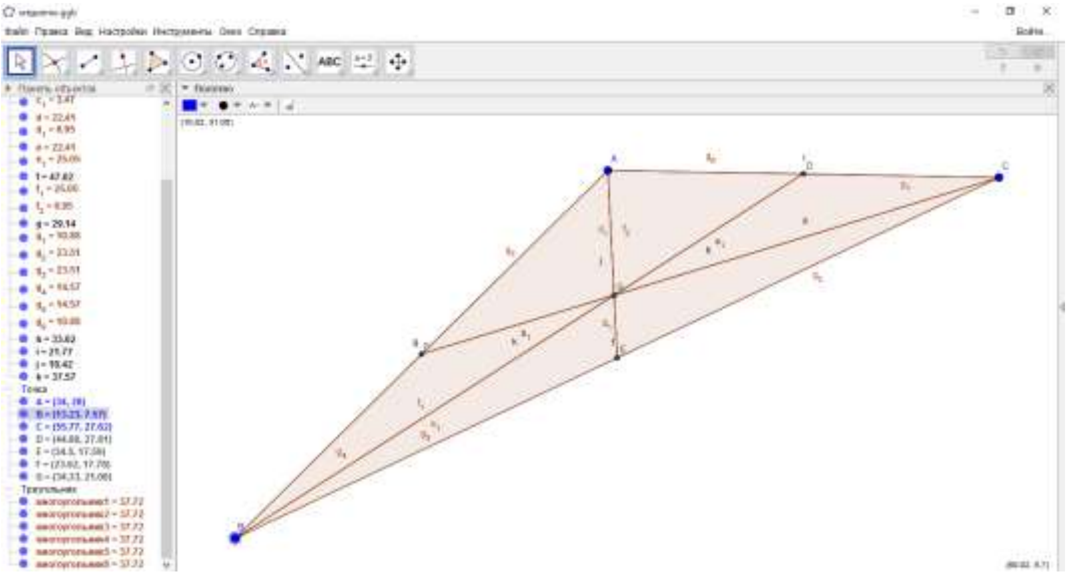
5. С помощью инструмента «Многоугольник» построить шесть треугольников, вершинами каждого из которых является вершина исходного треугольника, точка пересечения медиан и середина стороны. На панели объектов убедиться, что площади всех треугольников равны между собой.



6. С помощью инструмента «Перемещать» подвигать вершину исходного треугольника и убедиться, что медианы всегда пересекаются в одной точке и что полученные треугольники всегда равновелики.

.



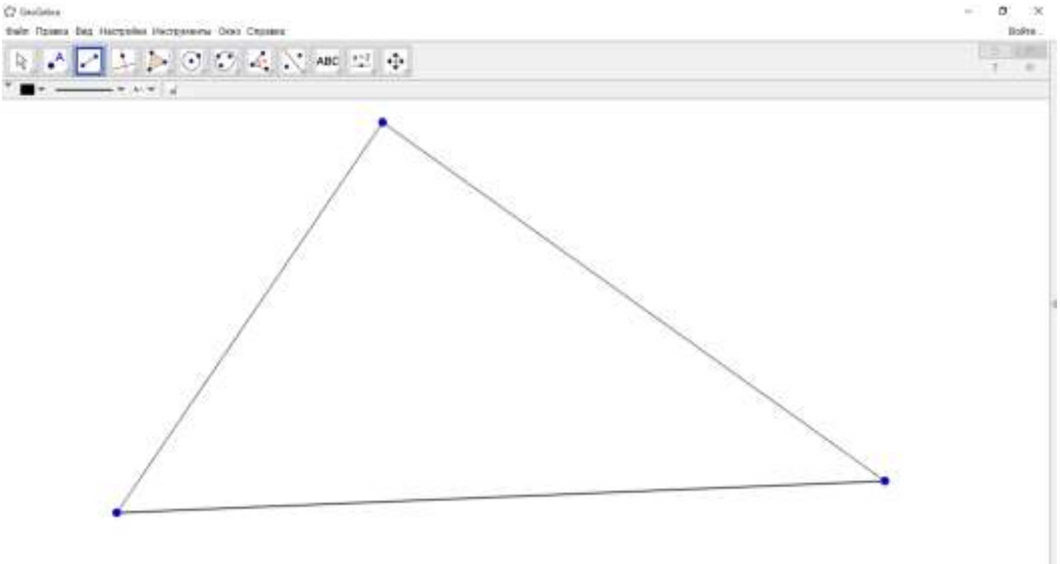


2. Точка пересечения серединных перпендикуляров

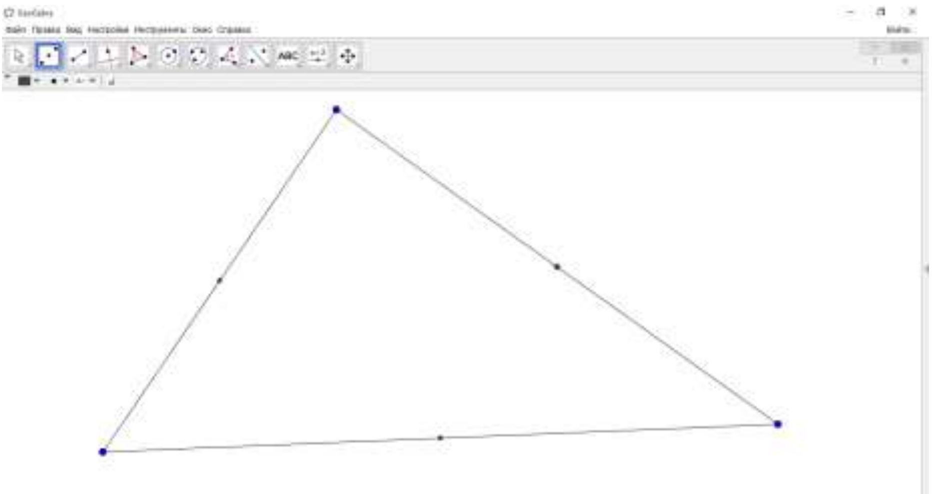
Теорема: Все серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Выполнение:

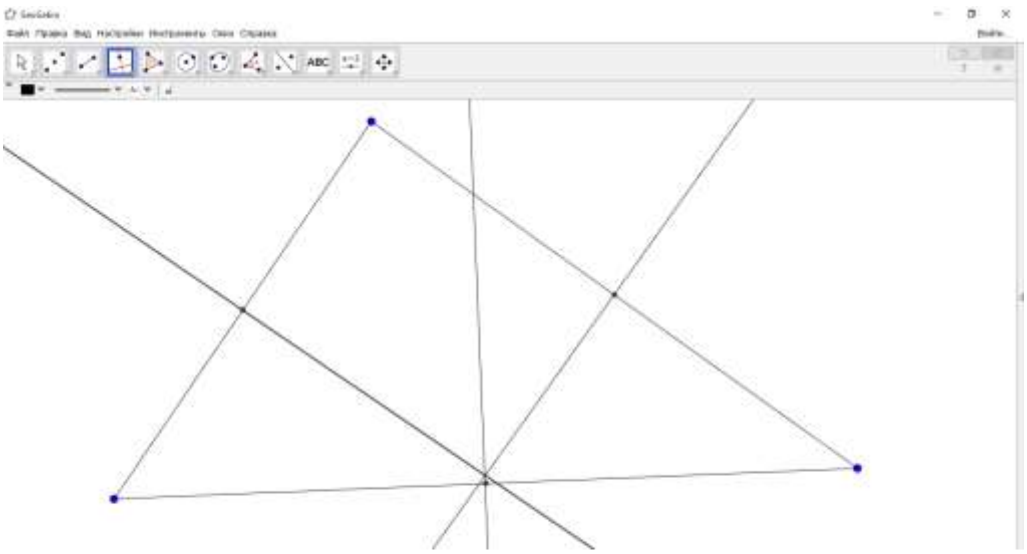
1. Запустить программу GeoGebra. Отметить три произвольные точки, не лежащие на одной прямой и соединить их отрезками попарно.



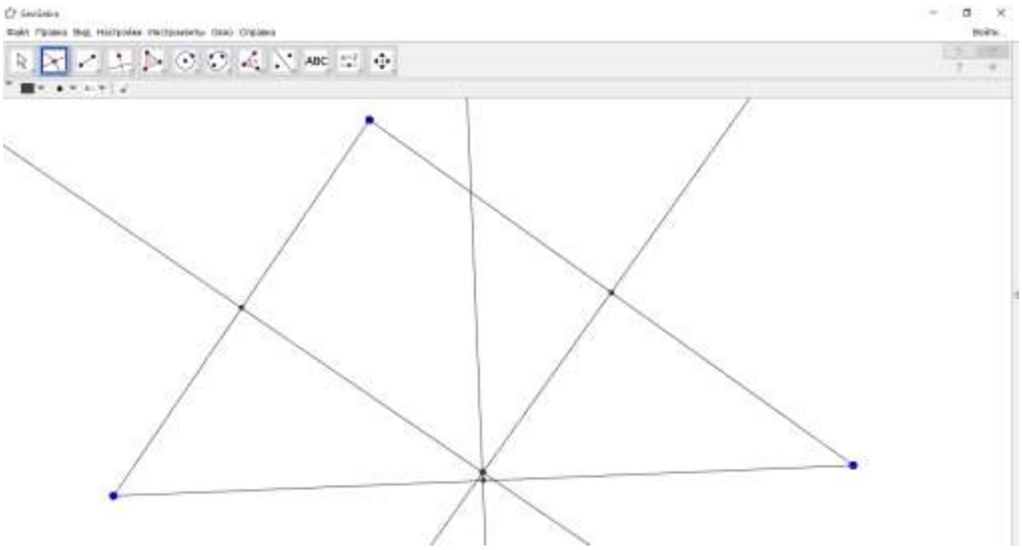
2. Отметить середину каждой стороны, используя инструмент «Середина»



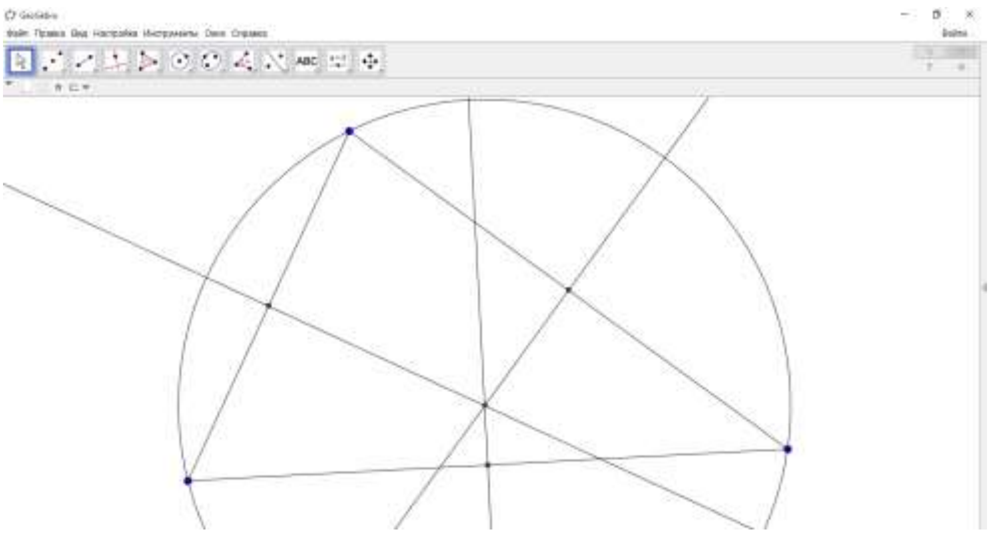
3. Построить перпендикуляры, восстановленные из середин сторон к этим же сторонам.



4. Отметить точку пересечения трех серединных перпендикуляров

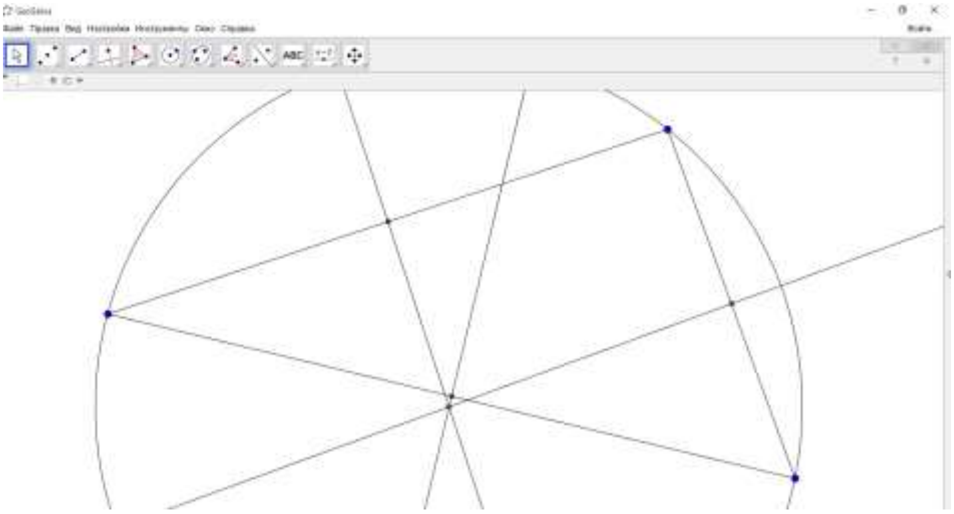


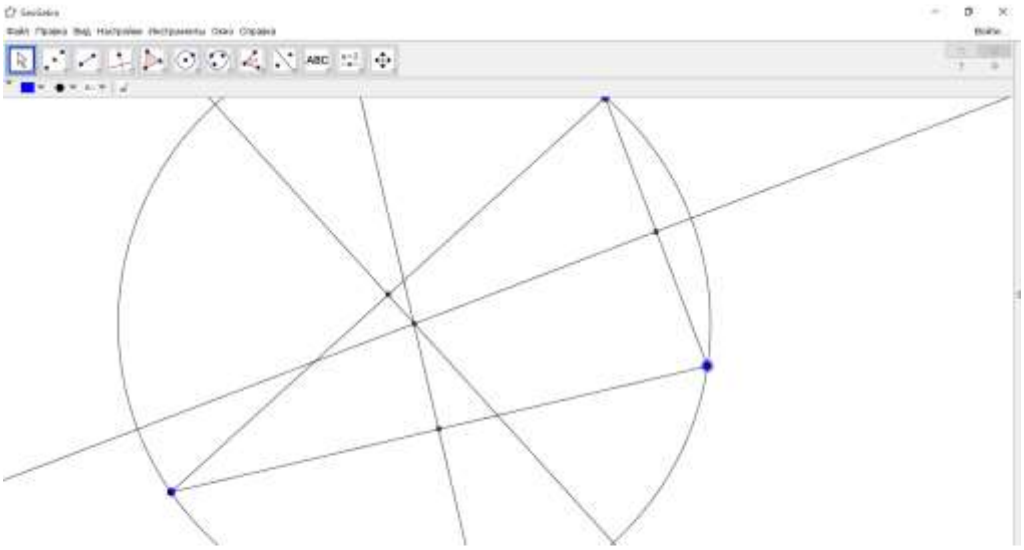
5. Построить окружность, центр которой лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, которая проходит через любую вершину. Убедиться, что она так же проходит и через две другие вершины исходного треугольника.



6. С помощью инструмента «Перемещать» подвигать вершину исходного треугольника и убедиться, что серединные перпендикуляры всегда пересекаются в одной точке и что данная окружность всегда является описанной.

.





.

1. 2. Построение графиков функций в GeoGebra

После запуска GeoGebra появляется окно, как показано ниже (Рисунок 1). С помощью чертежных инструментов (моделей), которые выбираются на панели инструментов, вы можете строить чертежи в блокноте, используя мышь. В это же время соответствующие координаты и уравнения отображаются в окне алгебры. Поле ввода текста используется для непосредственного ввода координат, уравнений, команд, функций; они сразу отображаются в блокноте после нажатия клавиши ввод (Enter).

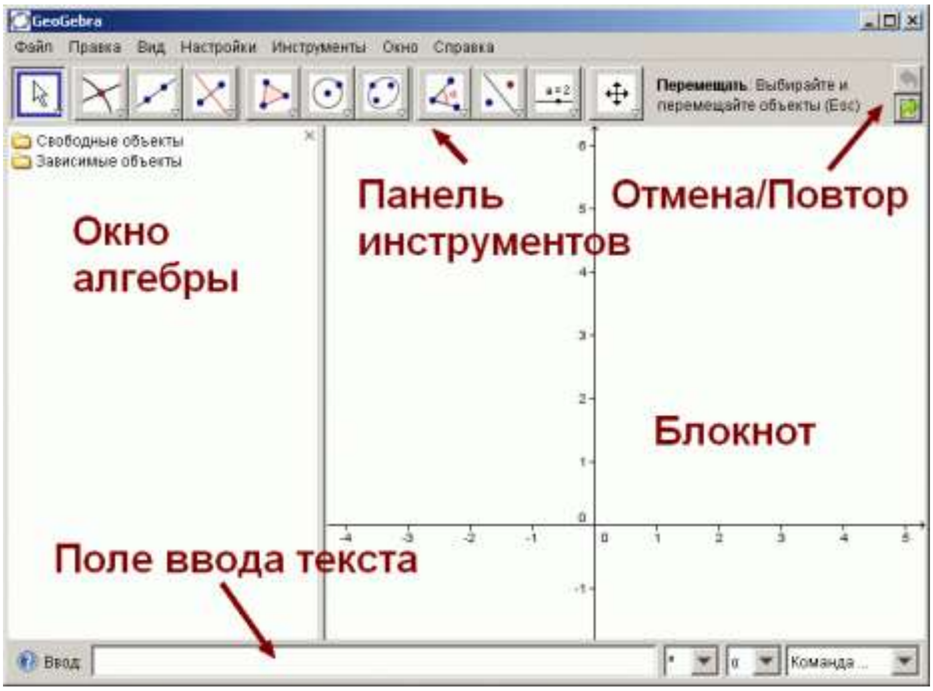


Рисунок 1

В программе GeoGebra график можно построить двумя способами: геометрическим (с помощью инструментов и команд) и алгебраическим (путем ввода формулы в командную строку). Для построения графиков и исследования функций мы будем использовать строку ввода

Строка ввода состоит из двух частей: непосредственно сама **Строка ввода**, а также **Список команд**(Рисунок 2) – выпадающее меню, в котором можно выбрать команду для ввода из списка. Отображение **Списка команд** можно отключить в меню **Вид**.

.

Рисунок 2

Так же на Строке ввода имеются выпадающие меню со специальными символами и обозначениями (Рисунок 3) .

Рисунок 3

И меню с буквами греческого алфавита (Рисунок 4).

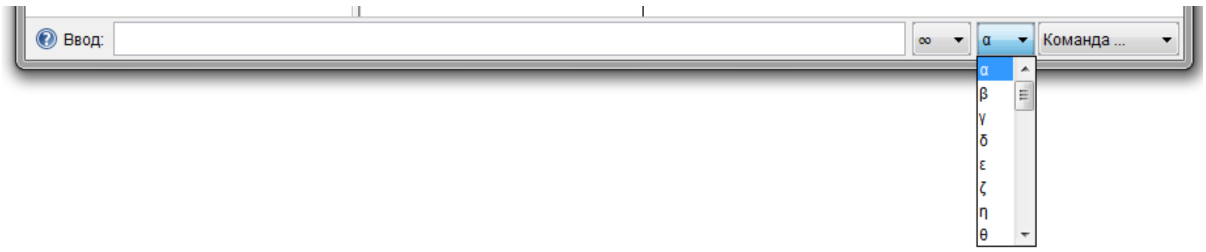


Рисунок 4

1.1 Примеры записи выражений

1. Для записи выражения ***sin α*** из первого выпадающего меню выбираем пункт ***sin(x)***, удаляем из скобок ***x*** и на его место вставляем символ ***α*** из второго меню.
2. При записи модуля и квадратного корня используются буквенные обозначения, пришедшие из языков программирования ***abs(x)*** и ***sqrt(x)***, которые можно также найти в первом выпадающем меню.
3. Число π можно найти сразу во всех двух меню.

.

1.2 *Построение графика функции f(x)=kx+b.*

Построить график данной функции можно двумя способами. Выбор способа построения зависит от цели задания. Если нам дано уравнение, где коэффициенты k и b уже известны, то в строку ввода формул(Поле ввода текста) записываем функцию (например, y=2x+3).

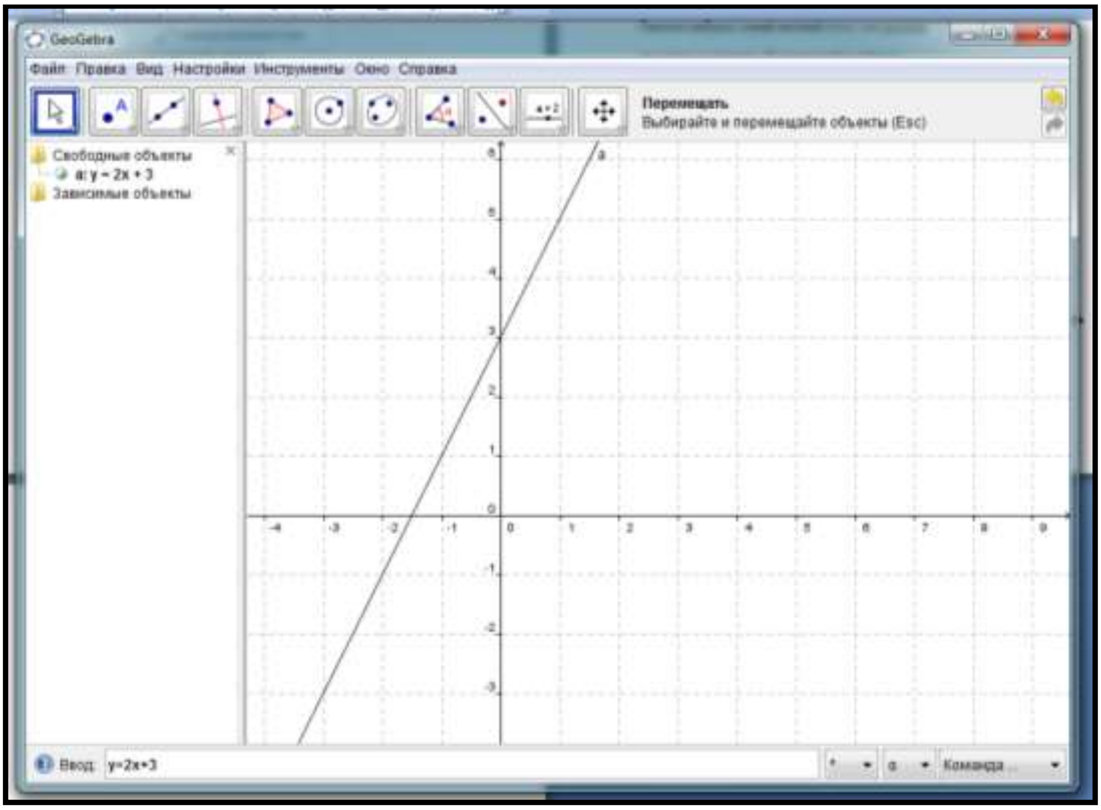


Рисунок 5

Если же значение коэффициентов k и b заранее нам не известны, то мы можем построить график функции с изменяемой величиной значения этих коэффициентов. Для этого создаем два ползунка k и b:

.

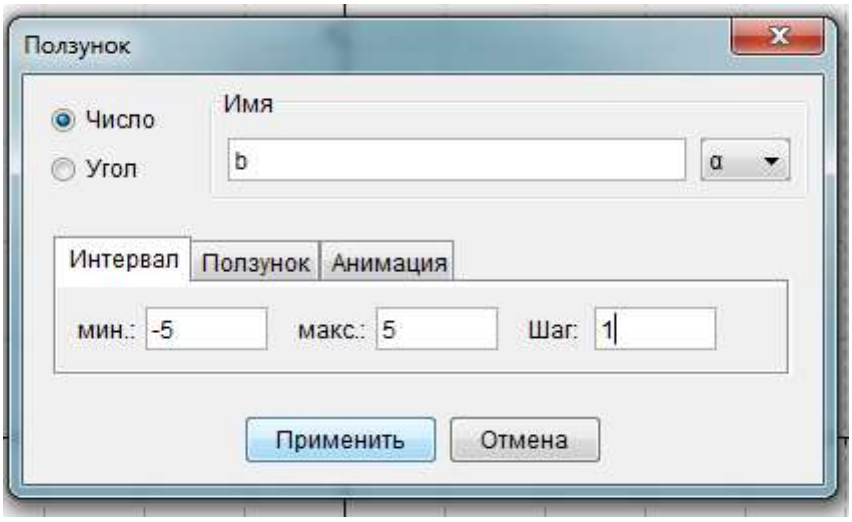


Рисунок 6

Вводимая формула будет иметь вид y=kx+b, где k и b имена ползунков.

Полученный график можно будет изменять в пределах установленных границ.

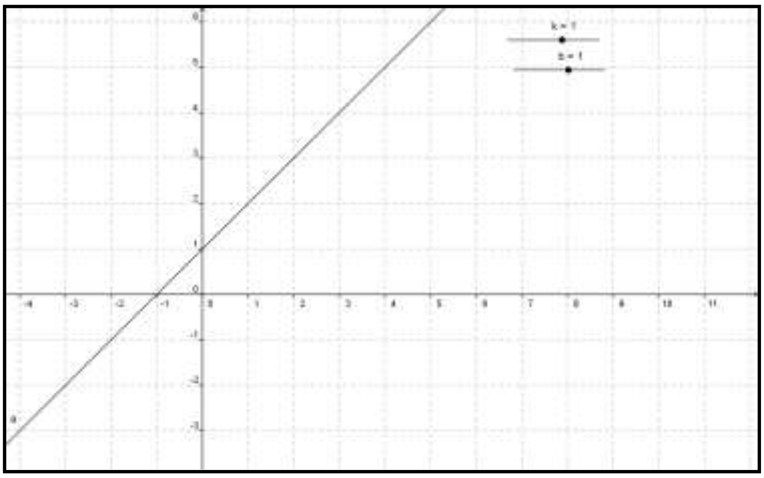


Рисунок 7

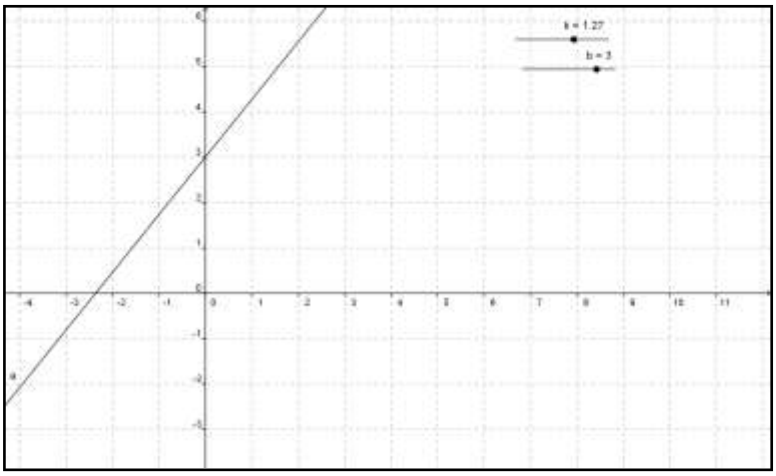


Рисунок 8

1.3 *Построение графика квадратичной функции*

a) функция с заданными коэффициентами

Построим график функции $f(x)=3x^2+4$.

Для этого введем формулуf(x)=3x^2+4 в строку формул, после чего получим следующий график:

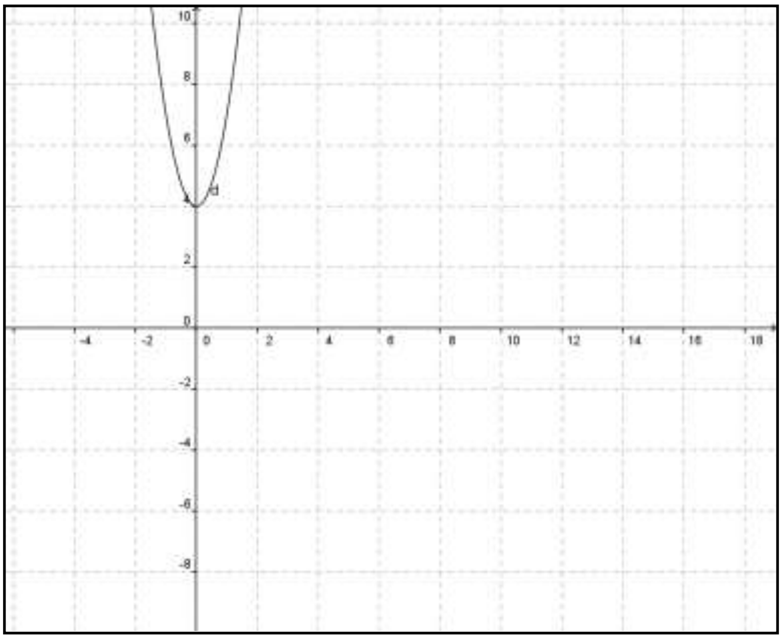


Рисунок 9

b) функция с изменяемыми переменными

Построим график функции $f(x)=a*x^2+b$.

Как и в случае с графиком прямой используем инструмент «Ползунок». Строим два ползунка с именами аи b, шаг изменения значений ставим равным единице. После того как ползунки будут готовы вводим формулуf(x)=a*x^2+b. Получаем график:

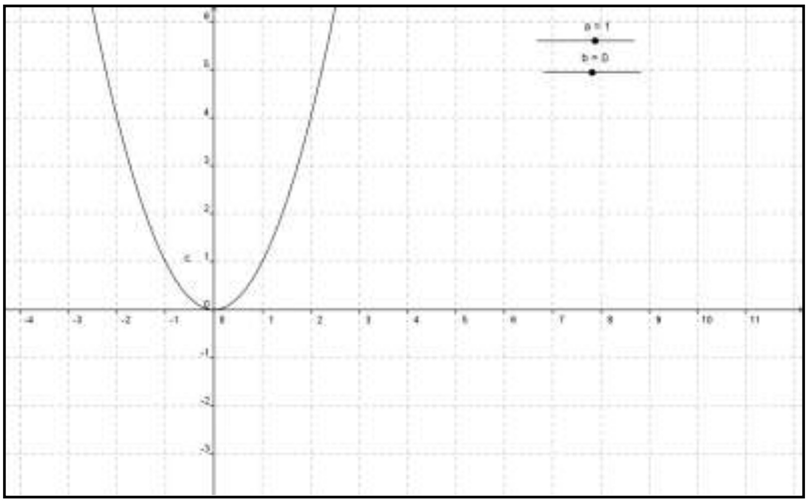


Рисунок 10

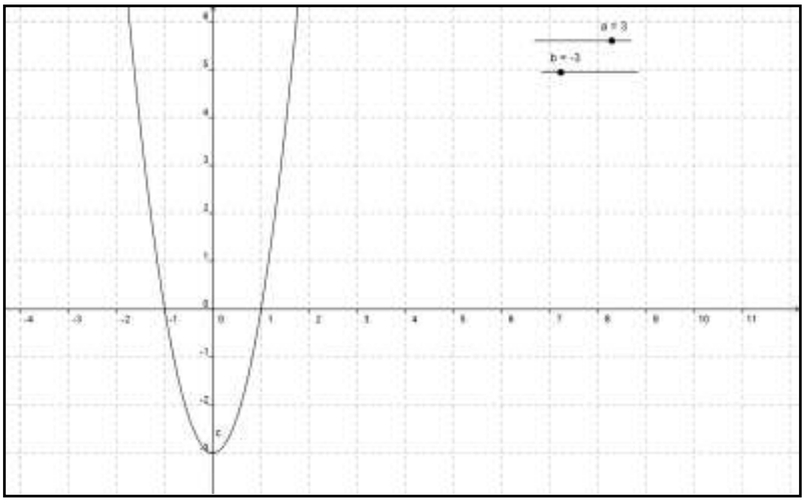


Рисунок 11

1.4 График кубической функции

a) функция с заданными коэффициентами

Построим график функции $f(x)=x^3+x^2+1$.

Вводим формулуf(x)=x^3+x^2+1 в строку. Нажимаем Enter.

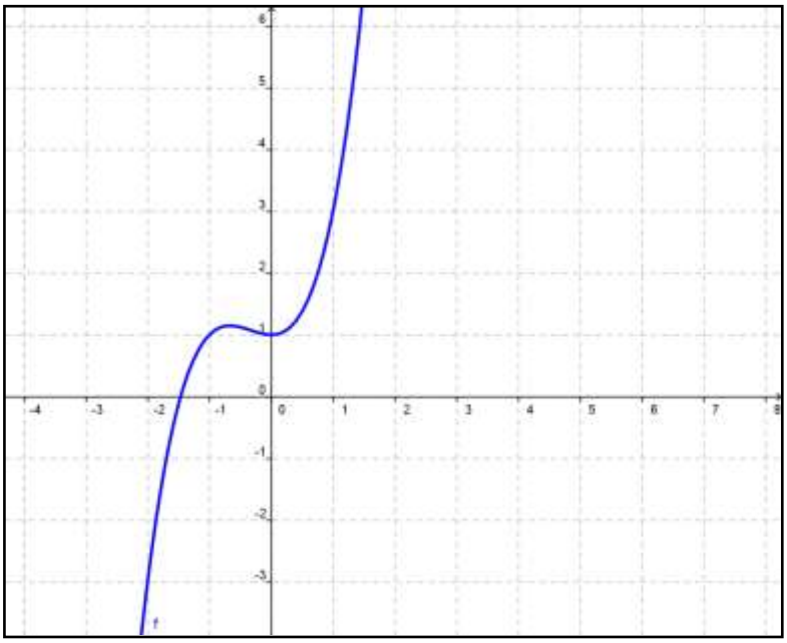


Рисунок 12

b) функция с изменяемыми переменными

Построим график функции $f(x)=a*x^3+b*x^2+c$.

В данной функции у нас три коэффициента a,b,c значения которых не определены, поэтому нам нужно построить три ползунка и указать в каких диапазонах и с каким шагом будут меняться значения коэффициентов.

После того как ползунки для коэффициентов a,bи сбудут готовы введём формулуf(x)=a*x^3+b*x^2+c.Получаем график:

.

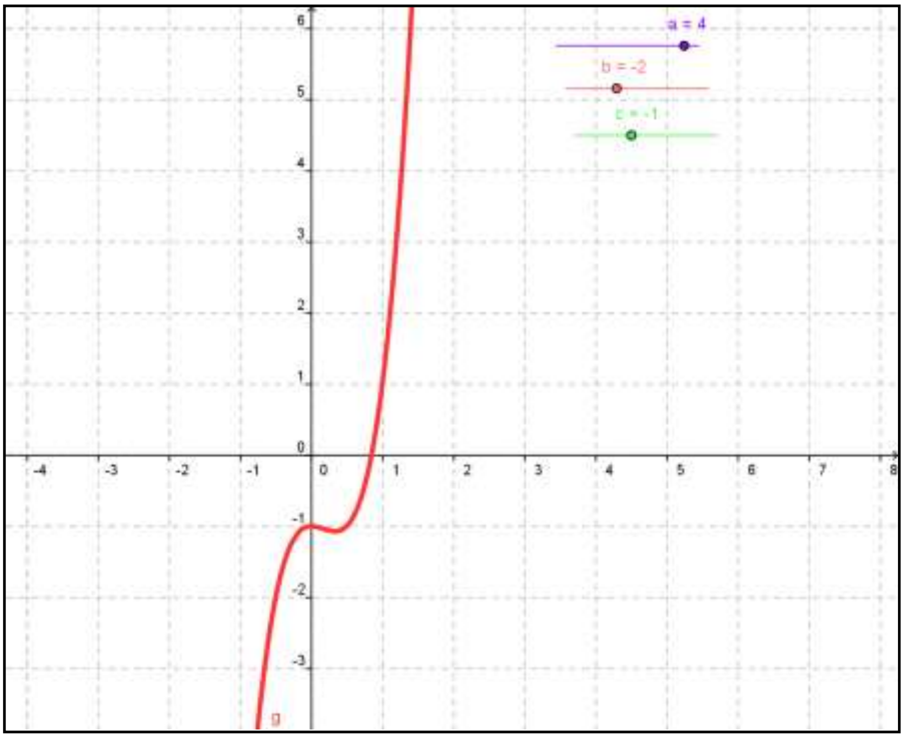


Рисунок 13

1.5 График функции f(x)=sin(x)

a) функция с заданными коэффициентами

При построении графика функции f(x)=sin(x) вводим формулу в строку формул и получаем готовый график.

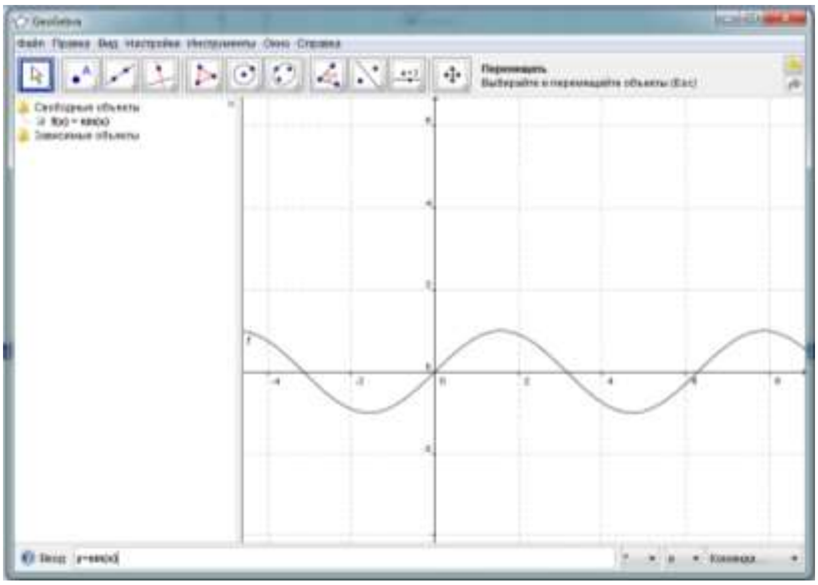


Рисунок 14

b) функция с изменяемыми переменными

Если же в основную формулу добавляются коэффициент и свободный член, то построение происходит по тому же алгоритму, что и в предыдущих функциях. Рассмотрим на примере функции f(x)=sin(a*x)+b.

Строим два ползунка a и b, затем вводим формулу f(x)=sin(a*x)+b

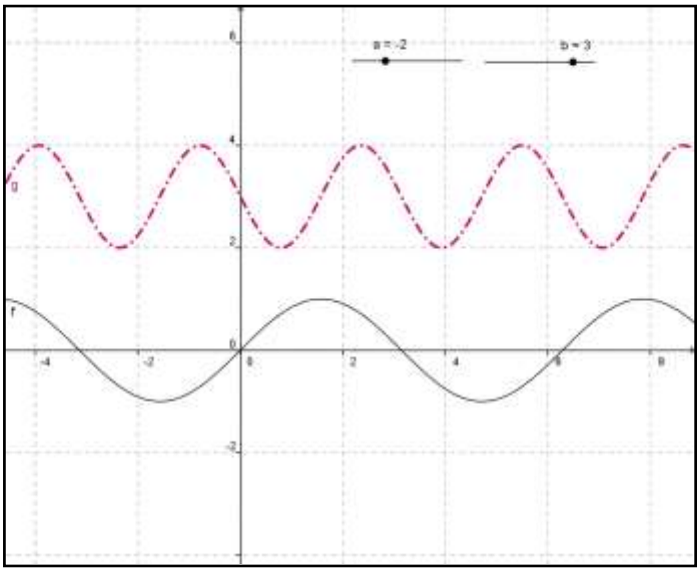


Рисунок 15

1.6 График функции f(x)=cos(x)

a) функция с заданными коэффициентами

Процесс построение графика функции f(x)=cos(x) в программе GeoGebra ничем не отличается от процесса построения графика функции f(x)=sin(x). Вводим формулу f(x)=cos(x), нажимаем клавишу Enterи смотрим получившийся график:

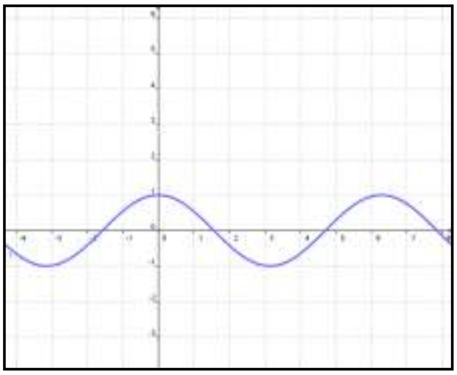


Рисунок 16

b) функция с изменяемыми переменными

Рассмотрим на примере функции f(x)=cos(a*x)+b.

.

Строим два ползунка a и b, затем вводим формулу f(x)=cos(a*x)+b, после нажатия клавиши Enter появляется график:

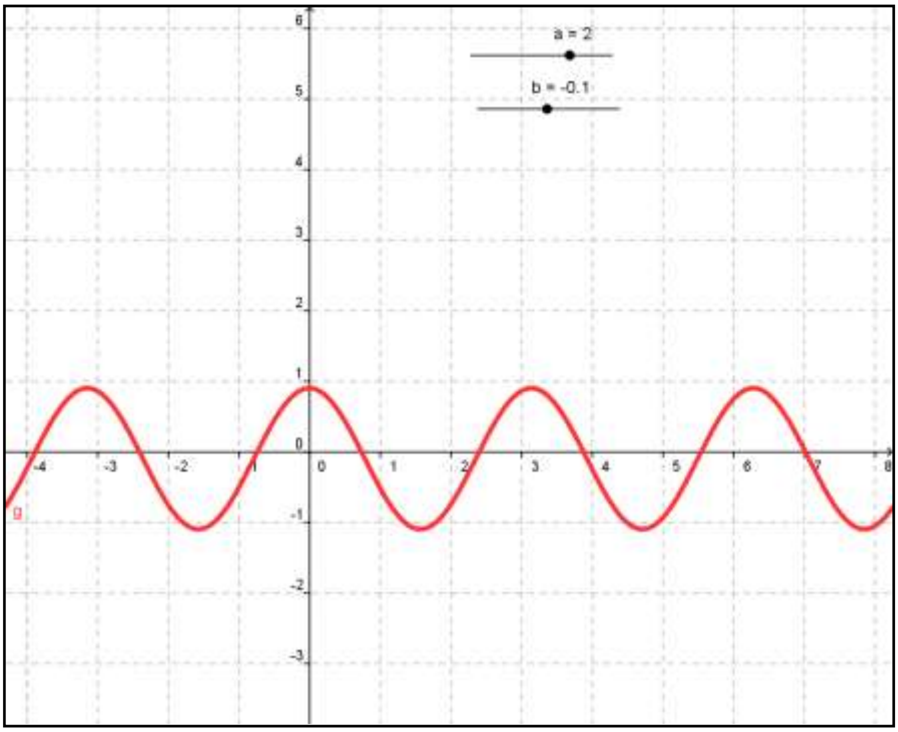


Рисунок 17

1.7 Логарифмическая функция

1) натуральный логарифм:

a) функция с заданными коэффициентами

Построим график функции f(x)=ln(x).

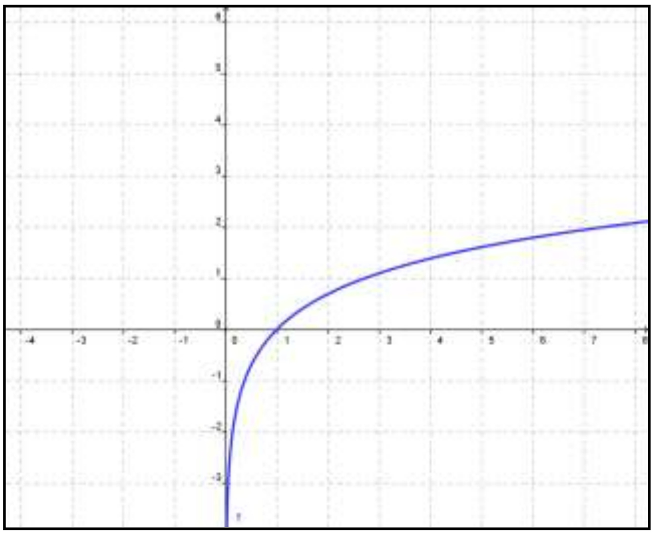


Рисунок 18

b) функция с изменяемыми коэффициентами

.

Построим график функции f(x)=a*ln(b*x)+c. В данном случае мы взяли три коэффициента, соответственно нам понадобиться три ползунка, отвечающих за изменение значений этих коэффициентов.

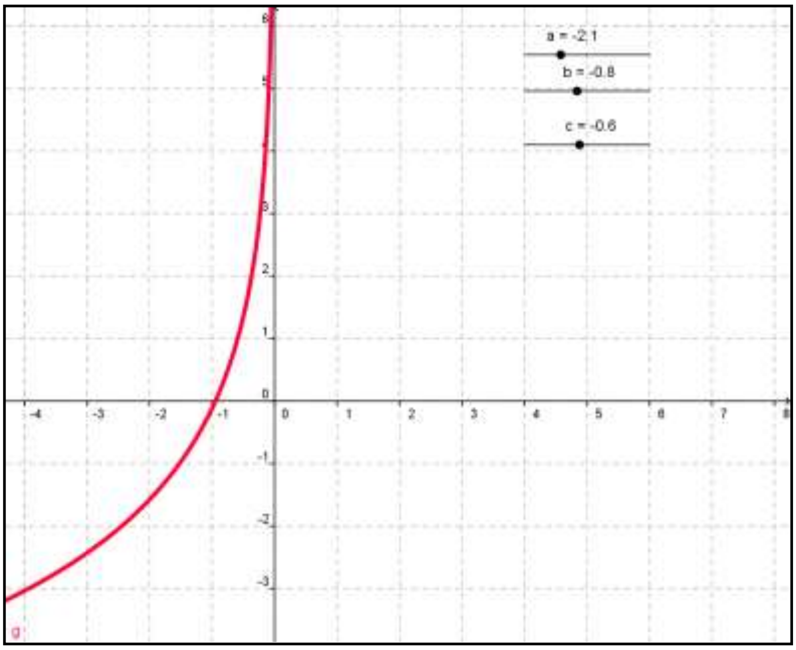


Рисунок 19

2) десятичный логарифм

a) функция с заданными коэффициентами

Построим график функции f(x)=lg(x).

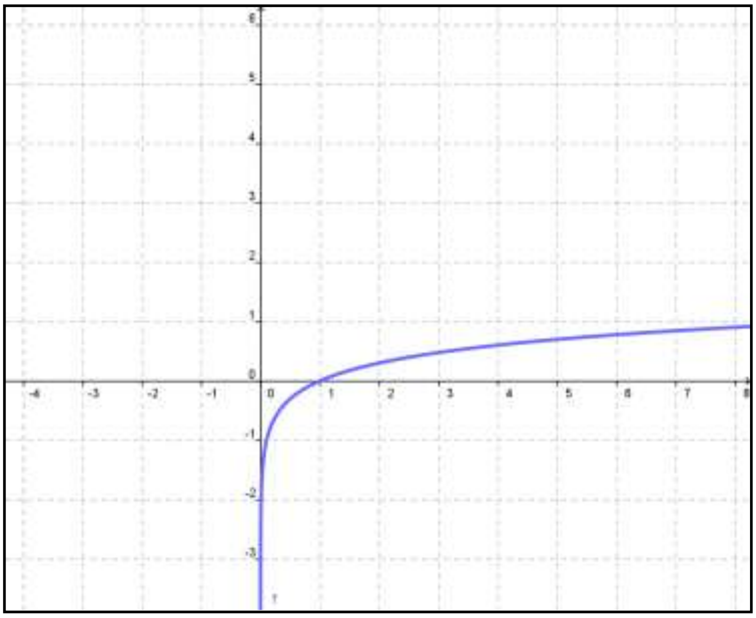


Рисунок 20

b) функция с изменяемыми коэффициентами

Построим график функции f(x)=a*lg(b*x)+c.

.

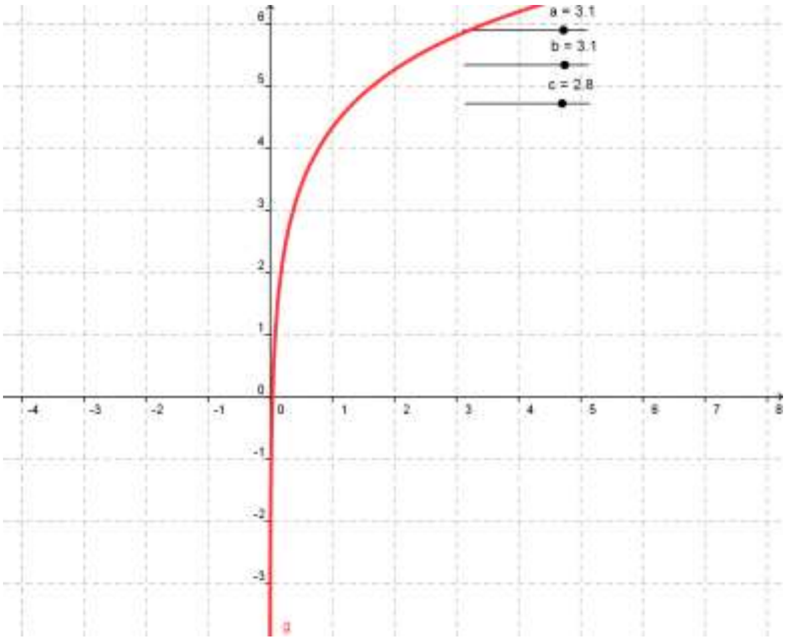


Рисунок 21

<u>В ПРОЦЕССЕ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ БУДЬТЕ ВНИМАТЕЛЬНЫ, ФОРМУЛА ФУНКЦИИ ЗАПИСЫВАЕТСЯ ТОЛЬКО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛАТИНСКИХ БУКВ!!!</u>

<u>ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ</u>

1. Постройте график линейной функции: f(x)=ax+b, где a $\in$ [-3;5], b $\in$ [-5;2]
2. Постройте график функции f(x)=ax2+bx+c, где a $\in$ [-1 ;2], b $\in$ [1 ;3], c $\in$ [-3 ;5]
3. Постройте график производной от функции: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$
4. Постройте график функции f(x)=ax3+bx2+cx+d, где a,b,c $\in$ [-6;4], d $\in$ [-5;8]
5. Постройте график функции:f(x)=-sin(1/2x-π/6)+2.
6. Постройте график функции: f(x)=acos(bx+c)+d,где a $\in$ [-2 ;2], b $\in$ [-2 ;3], c $\in$ [-3 ;3], d $\in$ [-3;5]

2. 3. Исследование функций

2.1 Изучение свойств функций в программе GeoGebra с помощью команд

Рассмотрим, например, свойства функции $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.

.

1. Открываем программу *GeoGebra* и в окно ввода данных (1) записываем исследуемую функцию $f(x) = x\hat{}3 + x\hat{}2 + 1$.

2. Нажимаем *Enter*. На поле чертежей появится график функции $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Для удобства можно сделать его цветным и увеличить его толщину. Для этого наводим на график курсор (график должен стать более жирным) и щелкаем правой клавишей мыши. В появившемся подменю выбираем (щелкаем на ней мышью) последнюю строку ***Свойства*** и в окошке ***Цвет*** щелкаем на нужном оттенке. Затем нажимаем на соседнее окно ***Размер*** и ведем курсором стрелочку в верхнем прямоугольнике, например, до цифры 5. Теперь нажимаем на рамочку со словом*Закрыть*.График изменил цвет и стал более жирным.

3. Теперь покажем на графике ***корни (нули) функции***. Для этого используем команду *Корень,* которую можно ввести самостоятельно в окно ввода данных, т.е. набрать *Корень[f]*, или найти, используя список команд в правом нижнем углу *Команды*, регулируемый бегунком. Затем в квадратные скобки записать *f*.

4. Нажимаем *Enter*.На графике появились точки пересеченияс осью *OX*. Определить абсциссы этих точек можно с помощью окна алгебры, в котором автоматически появляются координаты полученных точек.

5. Для нахождения ***точек экстремума*** функции используем команду *Экстремум* (находим ее в окне команд и щелкаем на ней мышью). В окне набора появится *Экстремум []*.Необходимо в квадратные скобки записать *f*.

6. Нажимаем *Enter*.На графике появились новые точки, которые можно выделить другим цветом(так как описано в пункте 2).

7. Команда *ТочкаПерегиба* поможет продемонстрировать ***точки перегиба*** фунции. Используем список команд в правом нижнем углу *Команды*, регулируемый бегунком.Выбрав соответствующую команду и щелкнув на ней, ивставив затем *f*,в окне набора в итоге должно быть записано *ТочкаПерегиба [f]*.

8. Нажимаем *Enter*.На графике появилась точка перегиба. Ее также можно выделить другим цветом, а также изменить размер.

9. Нахождение первой производной. Выбираем в меню *Команд* пункт *Производная[]* и в квадратных скобках указываем имя функции *[f]*.

10. Для графика первой производной находим ***корни (нули) функции*** для этого повторяем пункт 3.

11. Для нахождения второй производной повторяем пункт 9, но указываем имя функции не f, а f’.

12. В окне алгебры можно увидеть все построенные точки и их координаты, которые будут также выделены тем цветом, что и сами точки на графике.

13. В результате получим следующую картинку (рис.).

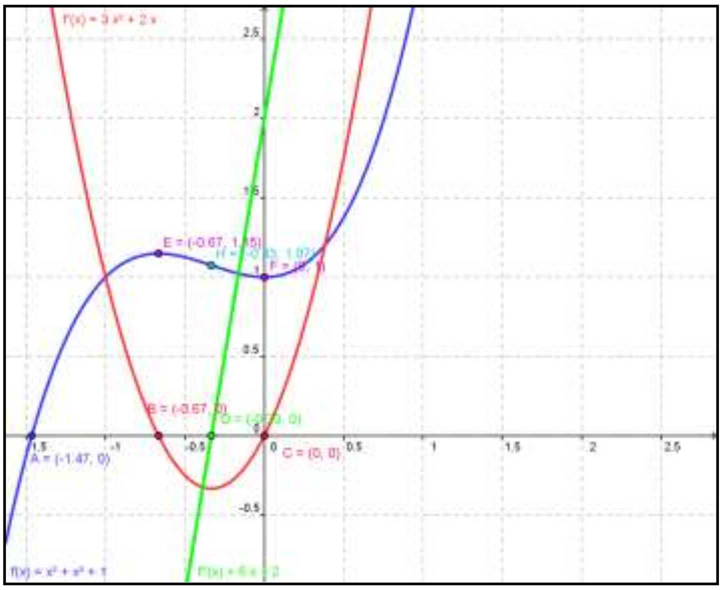


Рисунок 22

2.2 *Изучение свойств функций в программе GeoGebra, отсутствующих в меню команд*

С помощью программы можно также показать и другие свойства функций. Рассмотрим некоторые из них и покажем, как можно их выделить на чертеже.

1. ***Промежутки, в которых функция принимает положительные и отрицательные значения***, можно выделить на чертеже цветом. Покажем это на примере графика функции $y=(x+1)^2-4$ (вводить формулу можно в любом виде, в окне алгебры формула запишется так: $y=x^2+2x-3$).

2. Поставим точки пересечения графика с осью *OX*. Это можно сделать, как было описано выше с помощью команды *Корень[f]*, а можно используя панель инструментов. Во втором квадрате выбираем вторую строку ***Пересечение двух объектов***, и щелкаем последовательно на графике и на оси *OX*. Появляются две точки*A* и *B*, координаты которых записаны в окне алгебры (3).

3. Выделим полученные точки, например, зеленым цветом и увеличим их размер, для этого достаточно щелкнуть на одной из точек и вывести для нее подменю, в котором выбираем последнюю строку *Свойства*. Изменим цвет и размер сначала для одной точки, затем в левом окне подменю *Объекты* (в котором показаны все построенные объекты), щелкнем на второй точке и также изменим ее.

4. Выделим теперь промежуток, в котором функция принимает отрицательные значения. Выбираем третий квадрат на панели инструментов и в нем вторую строку *Отрезок*

по двум точкам (отрезок, соединяющий две точки), которая проиллюстрирована соответствующим рисунком. И последовательно нажимаем на точки*A*и *B* курсором (они становятся более яркими и крупными). Получился отрезок *a* (в окне алгебры автоматически появилась длина этого отрезка).

5. Выделим полученный отрезок, например, синим цветом. Для этого делаем активным первый квадрат на панели инструментов (операция*Перемещать*)и щелкаем на отрезке *a*, появится окошко, в котором будет два объекта (отрезок *a* и ось абсцисс). Выбираем отрезок *a* и еще раз щелкаем на нем. Появляется окно *Свойства*. Выбираем нужный оттенок и размер.

6. Можно скрыть название отрезка (*a*). Для этого тут же в свойствах выбираем первую задачу *Основные*и в нем вторую операцию*Показывать обозначения*, отменяем эту операцию (щелкаем на квадратике с галочкой, галочка должна исчезнуть). Затем нажимаем*Закрыть*.

7. Также выделяем другим цветом промежутки, в которых функция принимает отрицательные значения. В данном случае это будут два луча, поэтому выбираем в третьем квадрате четвертую строку *Луч по двум точкам*и нажимаем последовательно на точку*A*и затем на любую точку правее ее. Появится точка*C* и обозначение луча, которые можно скрыть, нажав на них правой клавишей мыши и в появившемся подменю для точки, щелкнуть на третьей строке *Показывать объект*(убрать галочку напротив этих слов). Также отмечаем луч с началом в точке*B* и выделяем полученные лучи нужным цветом с помощью свойств.

8. Для наглядности можно записать, что синим цветом выделен промежуток, в котором функция принимает отрицательные значения, а красным – промежутки, в которых она принимает положительные значения. Для этого выбираем восьмой – предпоследний – квадрат на панели инструментов *Надпись*, который проиллюстрирован буквами *ABC*.Нажимаем на этом поле, а затем на поле чертежей. Появляется окно *Текст*. Теперь ставим курсор на поле выделенного прямоугольника и пишем $y > 0$. Затем нажимаем внизу *OK*. Текст появляется довольно мелкий, поэтому изменяем его размеры и цвет. Выбираем последнюю строку *Свойства* и в появившемся окне щелкаем на третьем прямоугольнике *Текст* и ставим нужный размер, толщину и наклон, в четвертом прямоугольнике выбираем оттенок и нажимаем*Закрыть.* Затем также набираем текст $y < 0$ и повторяем те же действия для нового текста.

9. Получаем следующую картинку:

.

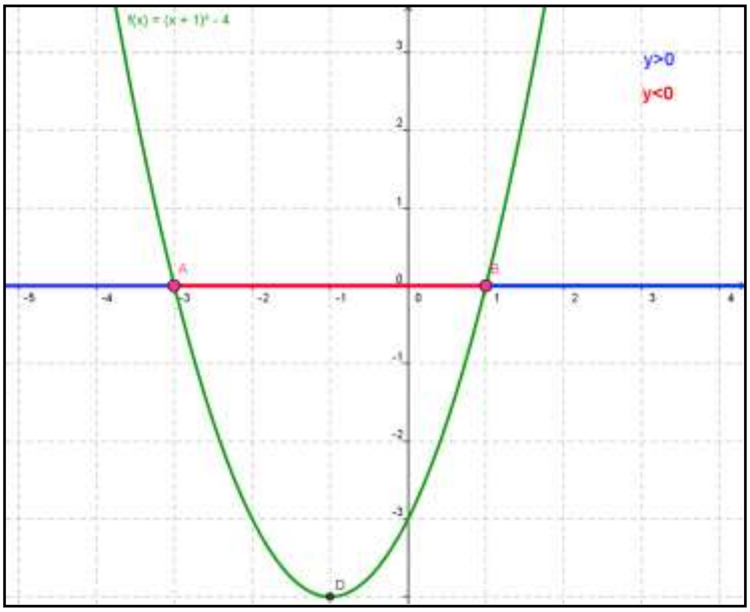


Рисунок 23

Касательная к графику функции

Программа *GeoGebra* предоставляет возможность строить касательные к графикам различных функций.

Построим касательную к графику функции $f(x)=x^3+3x^2$ в точке $x=-3$.

Записываем поочередно в область ввода – окно набора следующие команды и после каждой нажимаем клавишу*Enter*:

1. Набираем $a=-3$ (строим касательную в точке $x_0=-3$).

2. Затем $f(x)=x\wedge 3+3x\wedge 2$ (*Enter*).В результате в области чертежей появится график данной функции.

3. После построения графика в окне команд находим слово *Касательная* и нажимаем на нем левой клавишей мыши, оно появляется в окне набора. Теперь в квадратных скобках записываем *[a,f]*, таким образом, вводим команду *t=Tangent[a,f]*. (*Enter*).

4. График касательной построен (Рисунок 24).

.

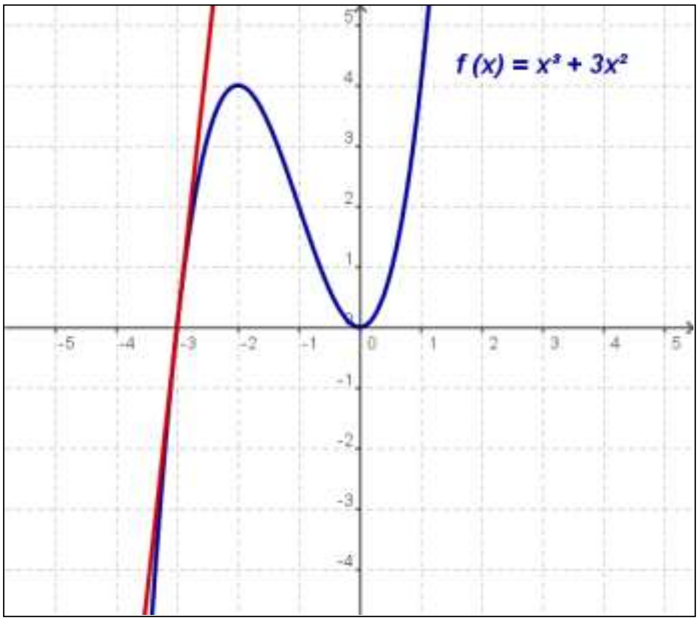


Рисунок 24

5. В окне алгебры (слева от области чертежей) появляется уравнение касательной к построенному графику.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Постройте график и исследуйте функцию: $f(x)=x^2-2x$
2. Постройте график и исследуйте функцию: $f(x)=x^3+5x$.
3. Проведите касательную к графику функции f(x) в точке с абсциссой x_0: $f(x)=-x^2-4x+2$, $x_0=-1$.

3. 4. Решение уравнений и неравенств графическим способом в Geogebra

1. Решение уравнений

Любое уравнение с одной переменной можно представить в виде f(x)=0. Построив график функции y=f(x), найдём точки его пересечения с осью Ox. Абсциссы этих точек будут корнями уравнения f(x)=0.

В некоторых случаях, уравнение f(x)=0 целесообразно представить в виде $f_1(x)=f_2(x)$. Построив графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, найдём их общие точки. Абсциссы найденных точек и являются корнями уравнения f(x)=0.

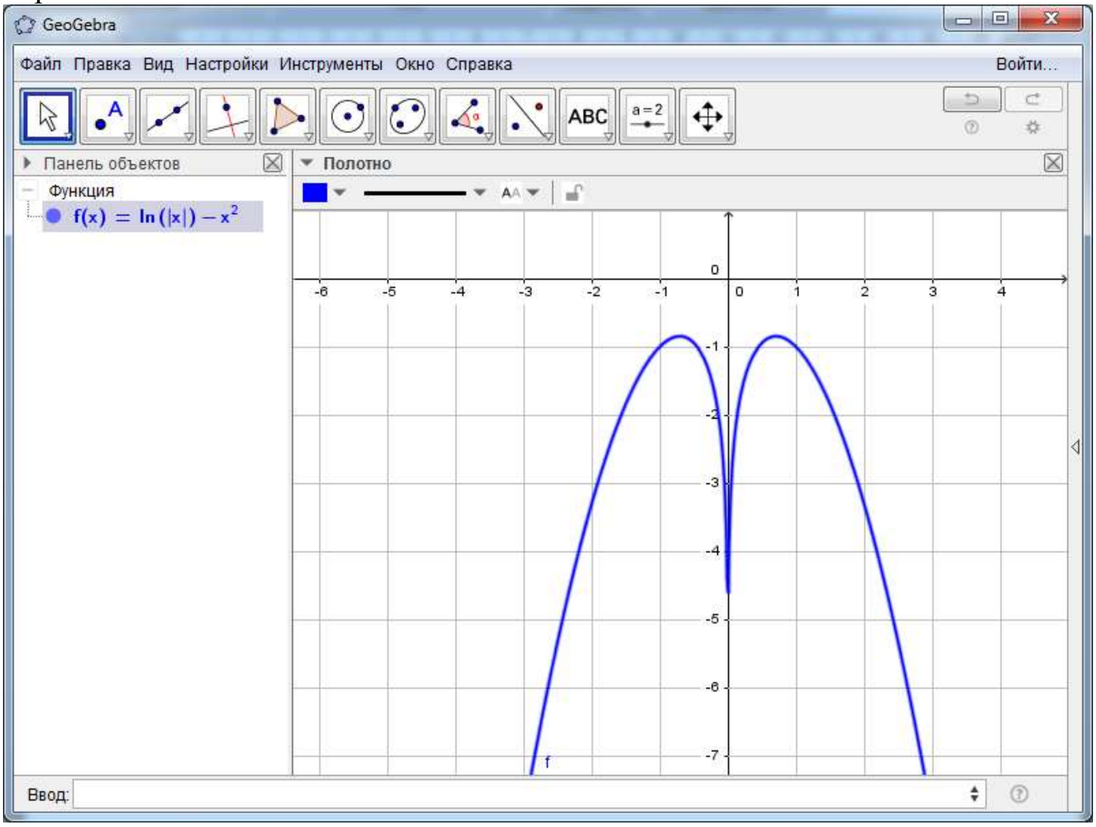
Решениями системы уравнений f1(x, y)=0 и f2(x, y)=0 являются координаты общих точек кривых f1(x, y)=0 и f2(x, y)=0.

Пример 1. Решить уравнение $\ln|x|- x^2 =0$.

.

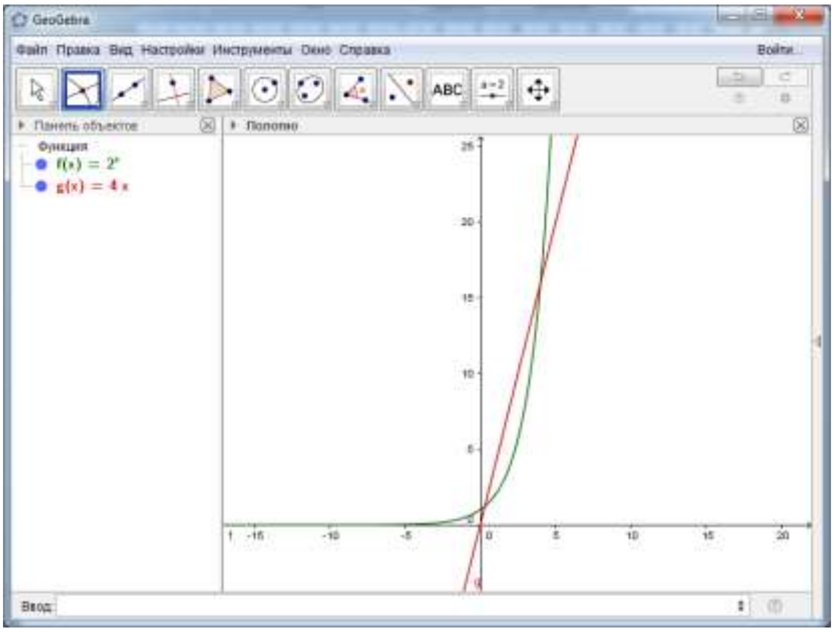
Построим график функции $y=\ln|x|-x^2$
Для этого в строке ввода записываем: ln(|x|) -x^2

На полученном изображении видно, что график не пересекает ось X. Значит, уравнение корней не имеет.

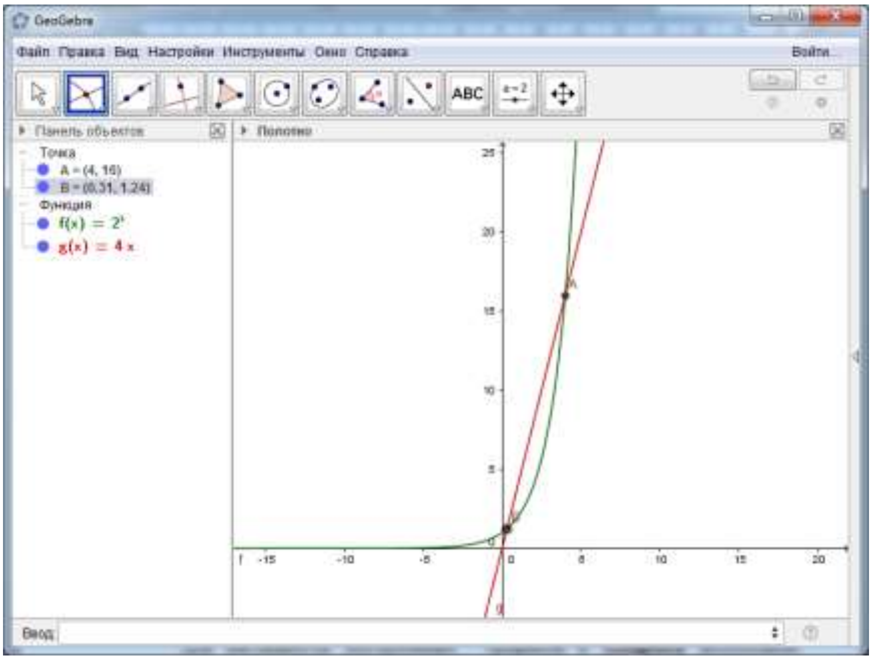


Пример 2. Решить уравнение $4x - 2^x=0$.

Перепишем уравнение в виде $2^x=4x$ и построим графики функций $y=2^x$ и $y=4x$



Найдем точки пересечения графиков, выбрав инструмент «Пересечение» и выделив поочередно каждый график. На Панели объектов появятся обозначения точек пересечения с указанием их координат. Абсциссы и являются решением данного уравнения: x=4 и x=0,31.



2. **Решение неравенств**

Любое строгое неравенство с одной переменной можно представить в виде $f(x)>0$ или $f(x)<0$. Построив график функции $y=f(x)$, найдём точки его пересечения с осью Ox. Решением неравенства $f(x)>0$ ($f(x)<0$) будут такие значения x, при которых график функции $y=f(x)$ расположен выше (ниже) оси Ox. Построение графиков функций и кривых можно выполнить с помощью свободно распространяемой программы GeoGebra.

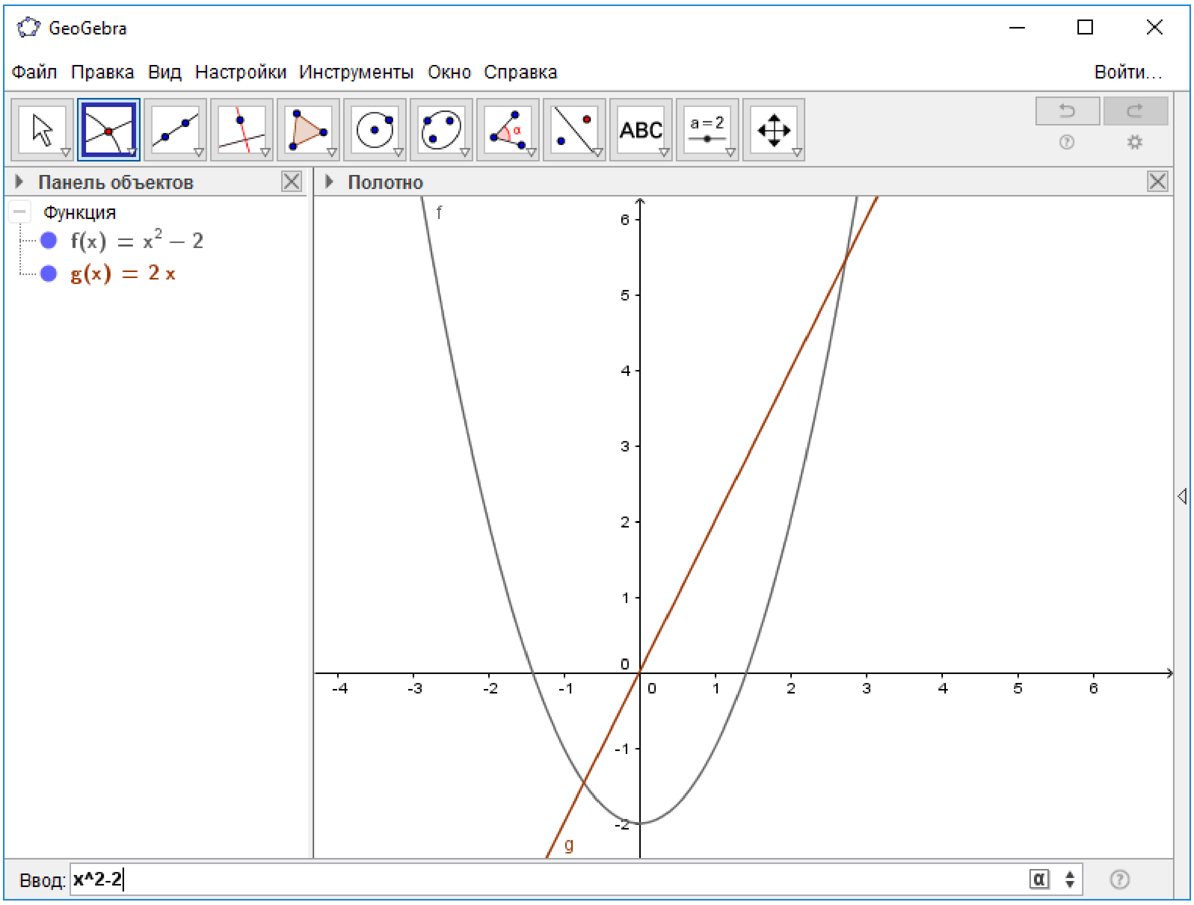
При решении в некоторых случаях неравенство $f(x)>0$ ($f(x)<0$) целесообразно представить в виде $f1(x)>f2(x)$ ($f1(x)<f2(x)$). Решениями неравенства $f1(x)>f2(x)$ ($f1(x)<f2(x)$) являются все такие значения x, при которых график функции $y=f1(x)$ расположен выше (ниже) графика функции $y=f2(x)$.

Пример 3.

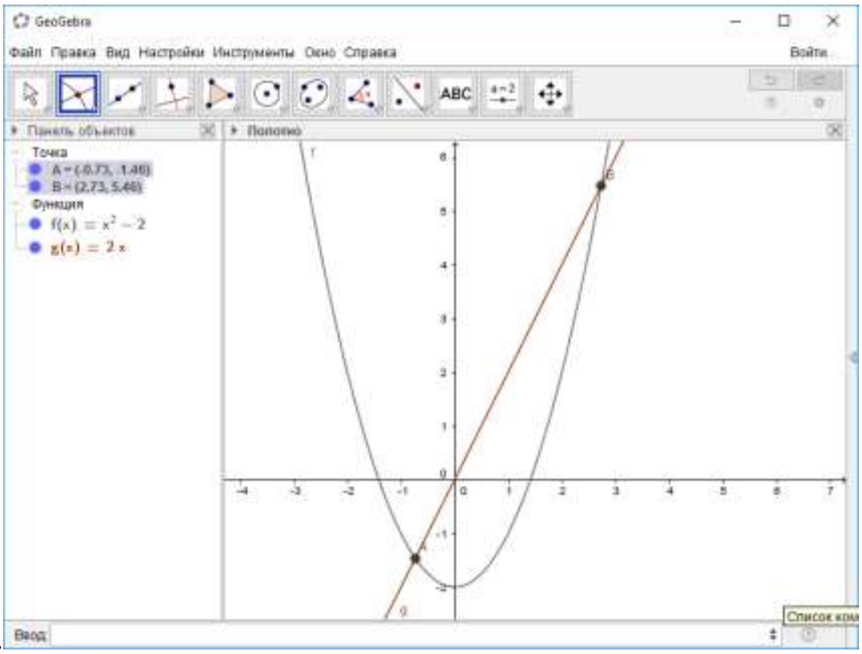
Решить неравенство $x^2 -2<2x$

Выполнение

1. Построим графики функций $y= x^2 -2$ и $y=2x$

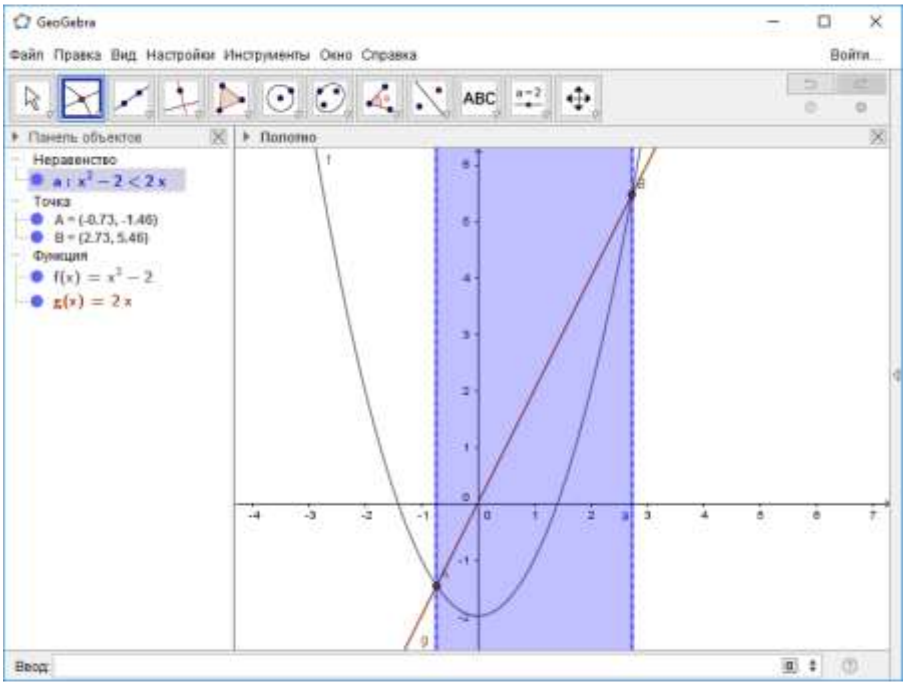


2. Построим точки пересечения



3. Выделим интервал, являющийся решением неравенства. Для этого в строке ввода необходимо ввести: x^2-2>2x

.



Решением является интервал (-0.73;2.73)

Системы неравенств

Решением системы неравенств с двумя переменными является часть плоскости, координаты точек которой удовлетворяют каждому и неравенств.

Пример.

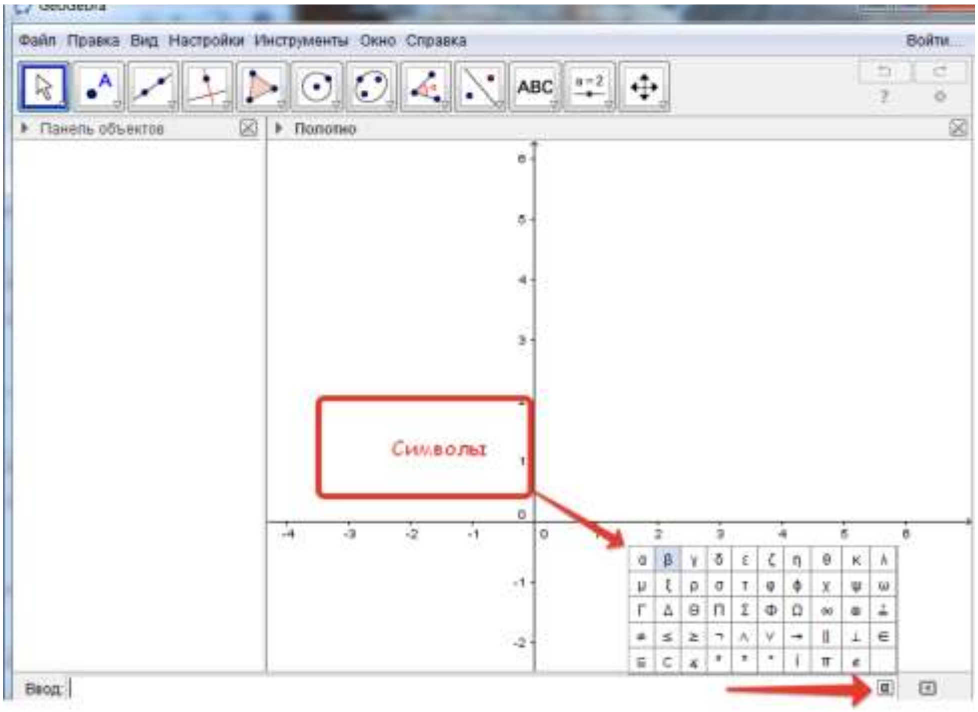
$$\begin{cases} x+y\le 0 \\ x^2-y\le 1 \end{cases}$$

Для наглядности построенных графиков в **Geogebra** необходимо заштриховывать или закрашивать области пересечения графиков и не только.

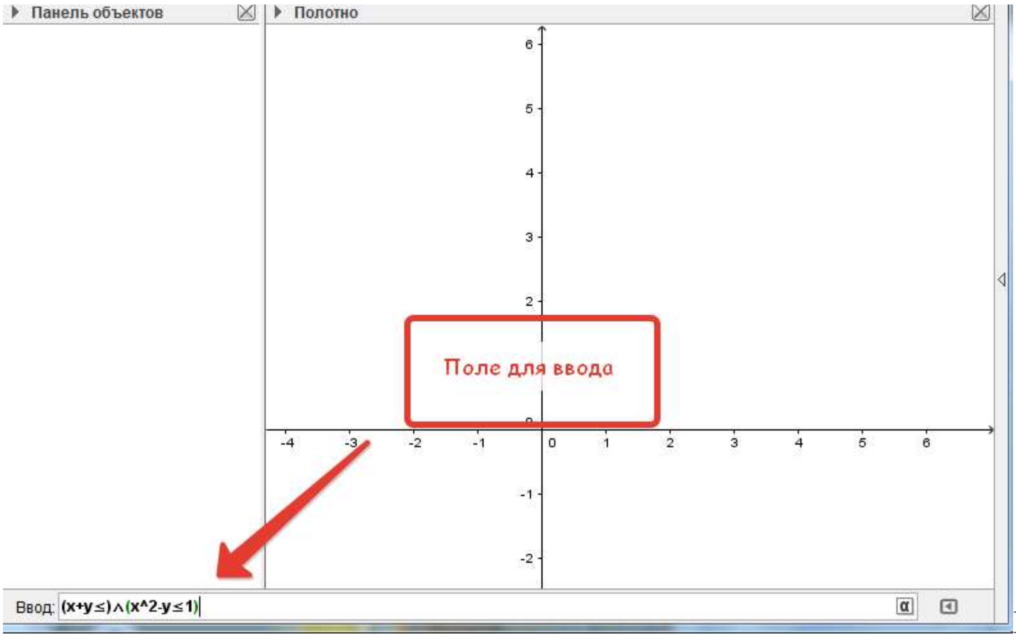
В самом низу окна имеется поле для ввода формул. Это красный прямоугольник. В нем имеется кнопочка.

Если нажать на эту кнопочку, появится окошечко с символами. Если навести мышкой на символ выскакивают пояснения к ним.

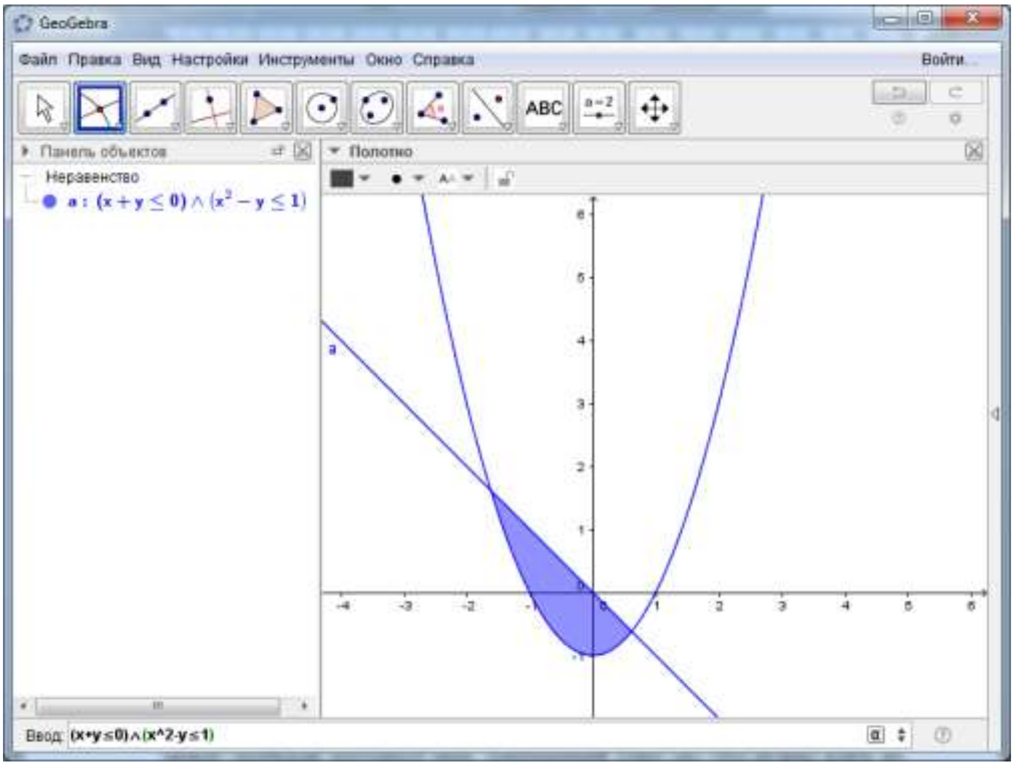
.



В поле ввода формул наберите неравенства (обязательно в скобочках) и между скобками поставьте знак, означающий союз «и» (его нужно взять из окошка символов).

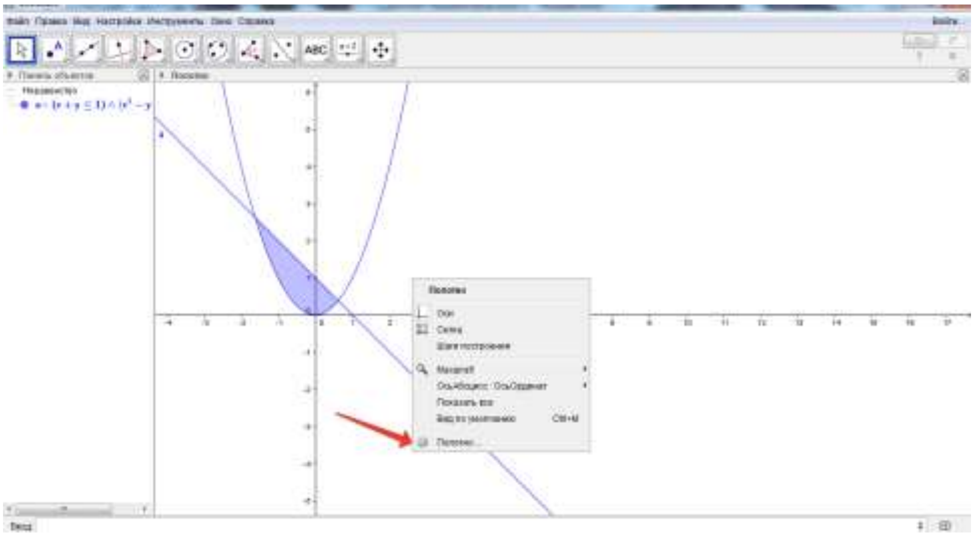


Нажмите ENTER.



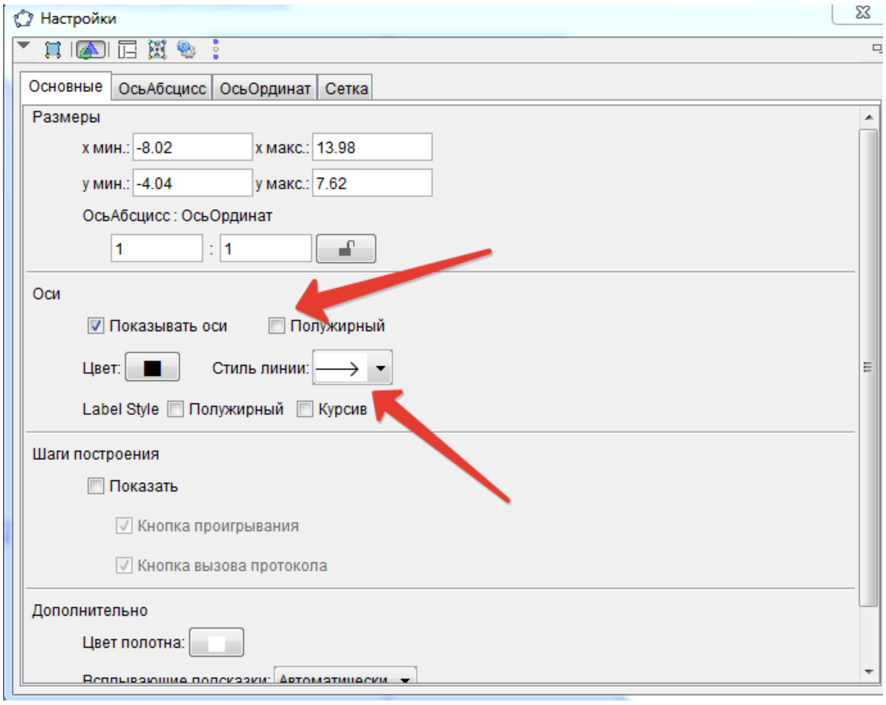
Вот и готов чертеж. Зоны неравенств выделились автоматически Но можно, для наглядности, область пересечения заштриховать. Черные и жирные линии более выразительны. Давайте научимся делать это.

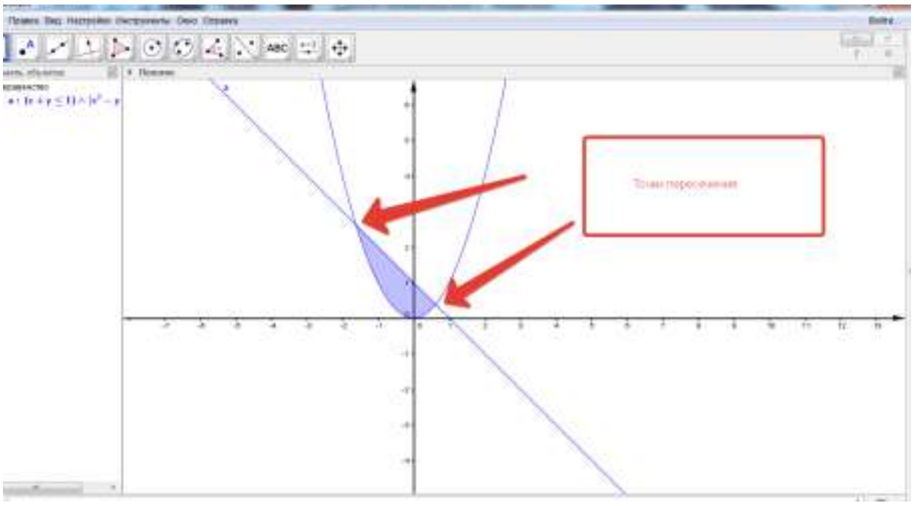
На белом фоне кликните мышью и нажмите на правую клавишу мыши. Откроется маленькое окошечко.



Нажимаем Полотно. В открывшемся окне ставьте галочку против Полужирный и нажав против Стиль линии выбираем нужный вид осей координат. Закройте это окно нажав красный крестик справа наверху и увидите такую картинку.

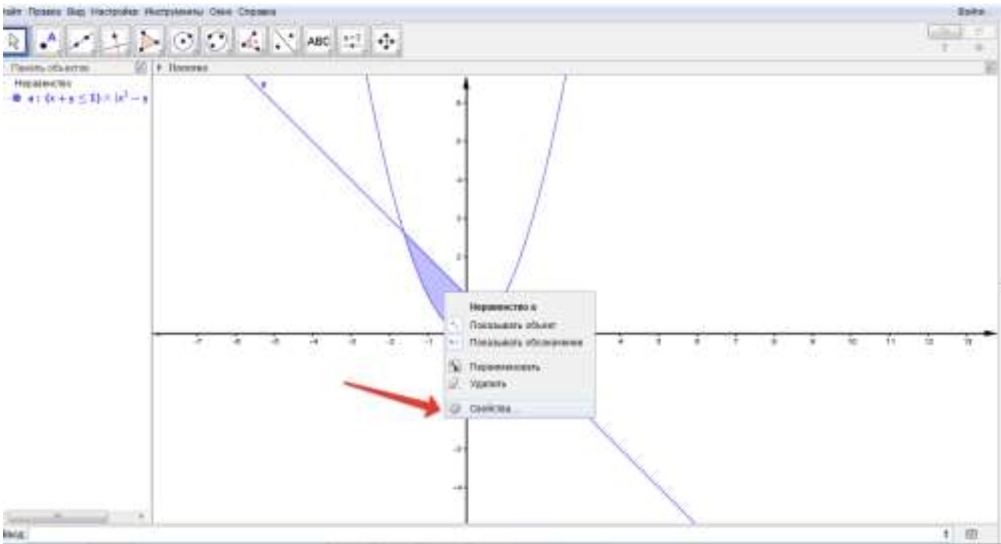
.





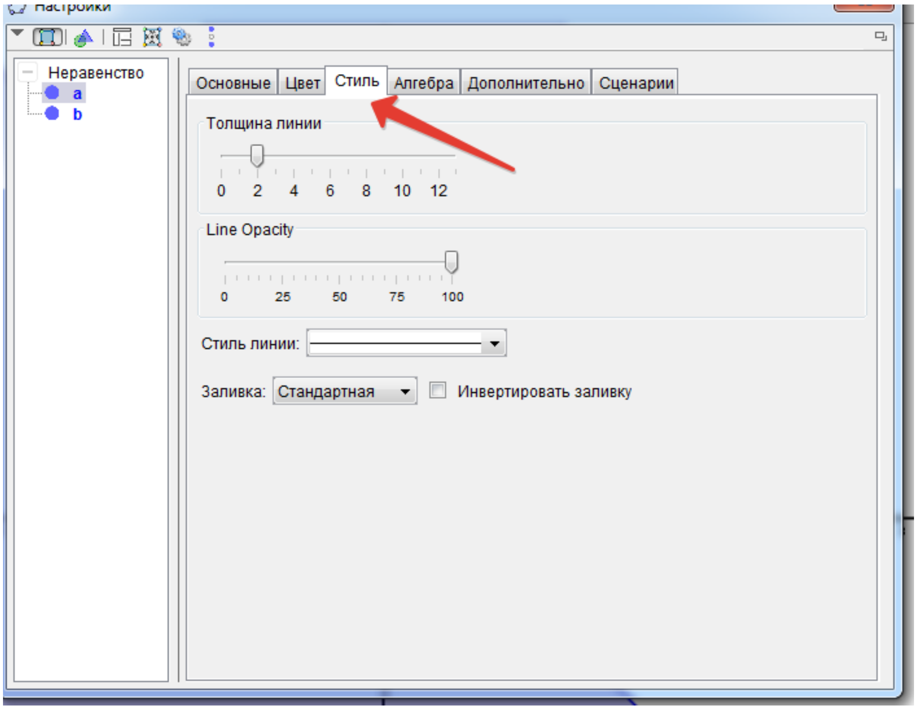
Оси стало лучше видно

8.Теперь щелкаем мышкой внутри закрашенной области и жмем правую клавишу мыши.



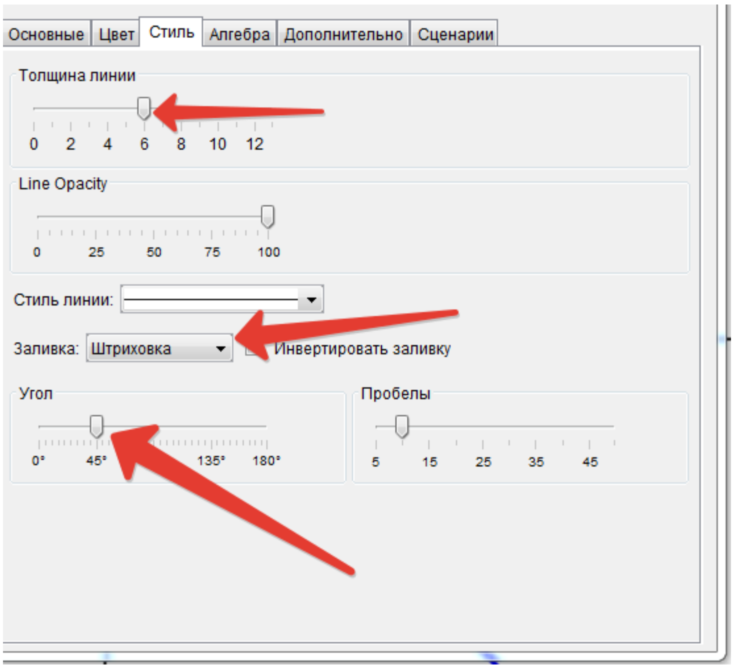
.

В выпадающем окне нажимаем Свойства. Откроется такое окно.



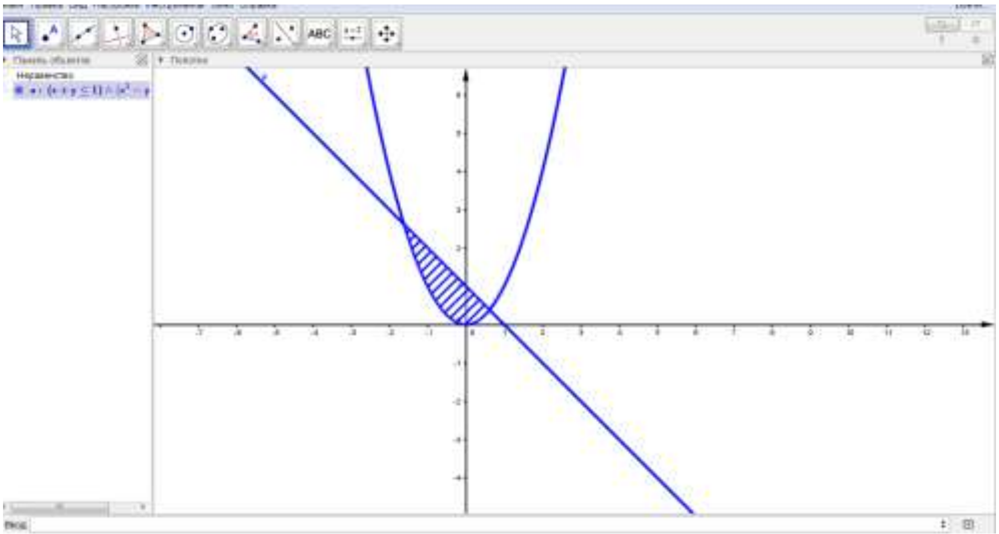
В нем нажимаем Стиль

Мышкой показываем и кликаем на нужную толщину линии. Нажимаем Заливка и выбираем Штриховка.

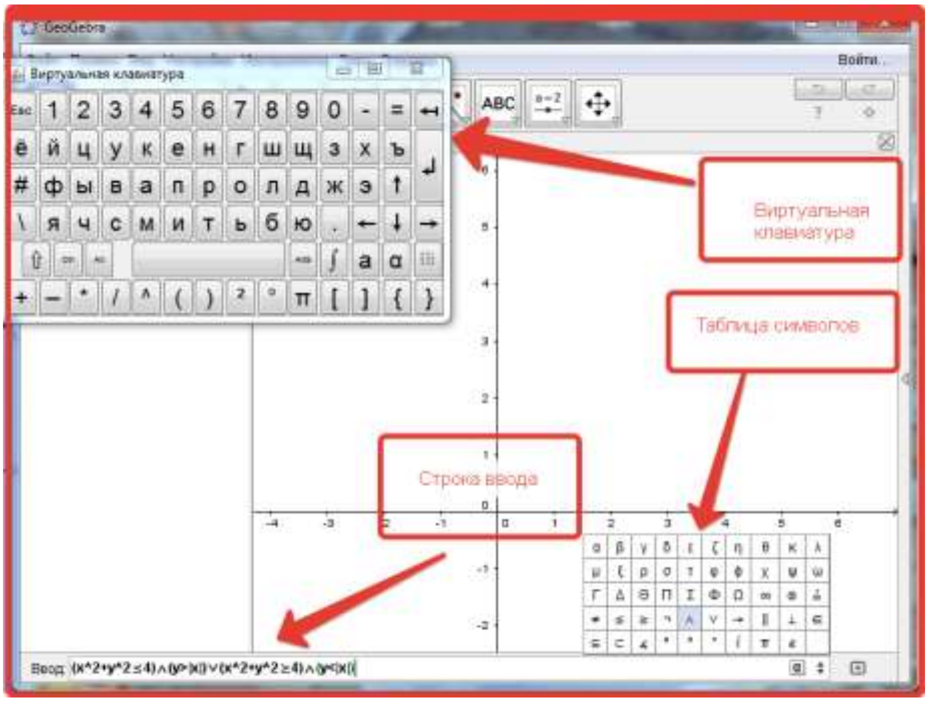


Закрываем это окно.

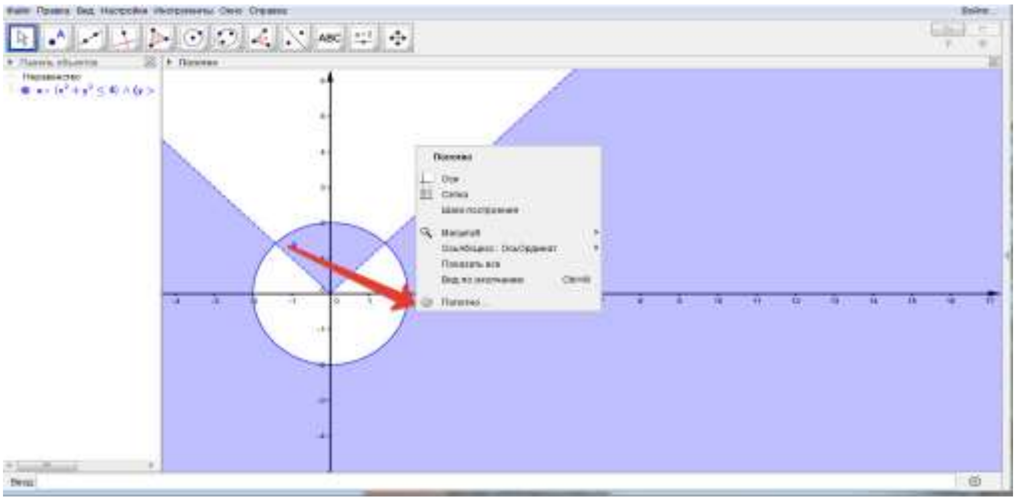
.

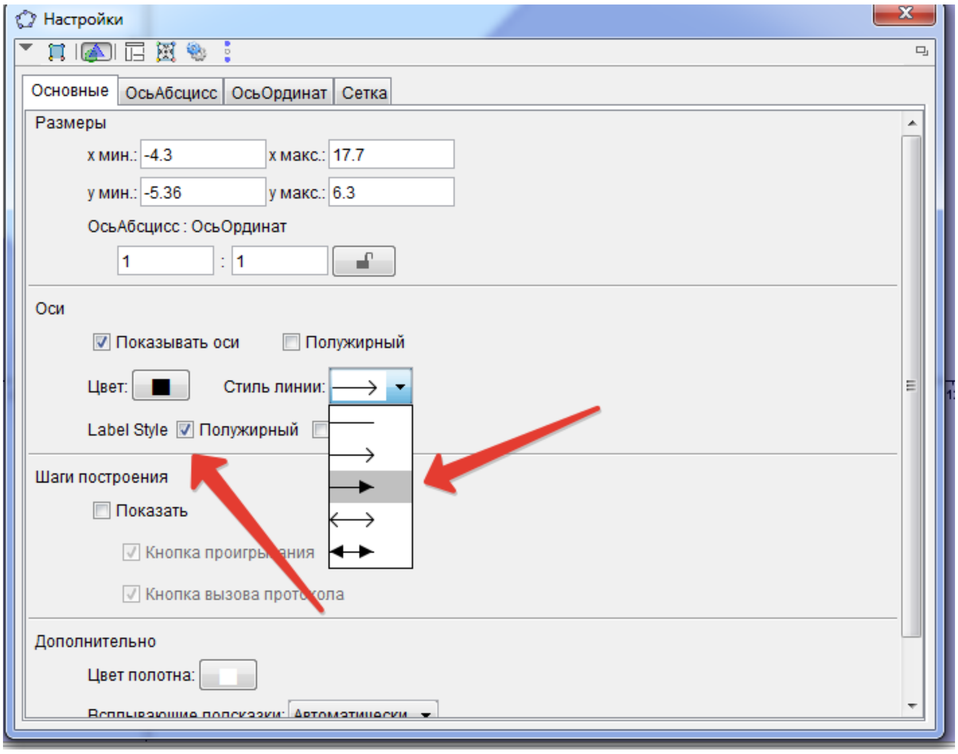


В более сложных случаях необходимо пользоваться Виртуальной клавиатурой. В поле ввода формул наберите неравенства (обязательно в скобочках) и между скобками поставьте знак, означающий союз «и» (его нужно взять из окошка символов) используя таблицу символов и виртуальную клавиатуру

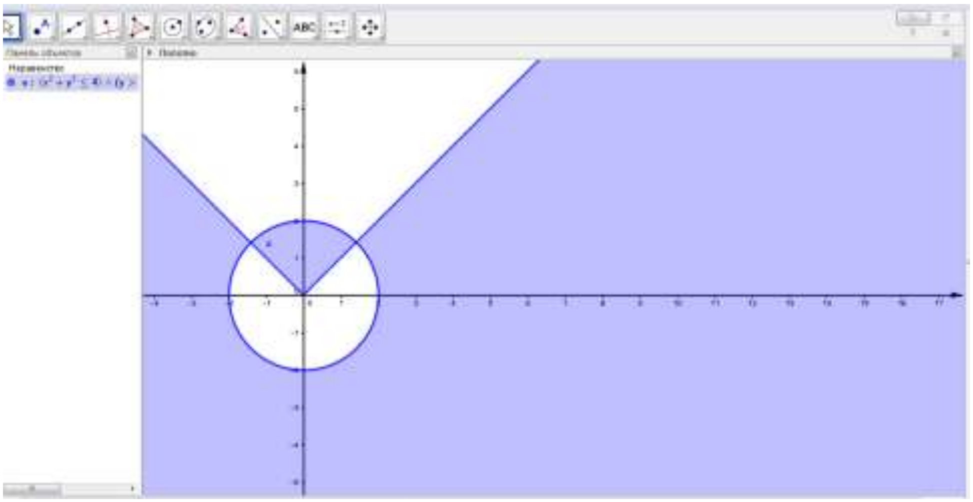


Нажимаем Полотно. В открывшемся окне ставьте галочку против Полужирный и нажав против Стиль линии выбираем нужный вид осей координат. Закройте это окно нажав красный крестик справа наверху и увидите такую картинку.





Области неравенств автоматически закрасятся. Если формулы набрать отдельно, то такой закраски не будет.



4. 5. Построение сечений многогранников

Цель: Изучить возможности программы Geogebra по построению многогранников и их сечений по заданным точкам.

Основные теоретические понятия.

Секущей плоскостью называется плоскость, по обе стороны от которой расположены точки многогранника.

Сечением многогранника плоскостью является многоугольник, представляющий собой множество всех точек пространства принадлежащих одновременно данным многограннику и секущей плоскости.

Существуют следующие способы построения сечений:

1. Метод следов.

2. Метод параллельных прямых.

3. Метод дополнения.

4. Метод деления.

5. Метод переноса секущей плоскости.

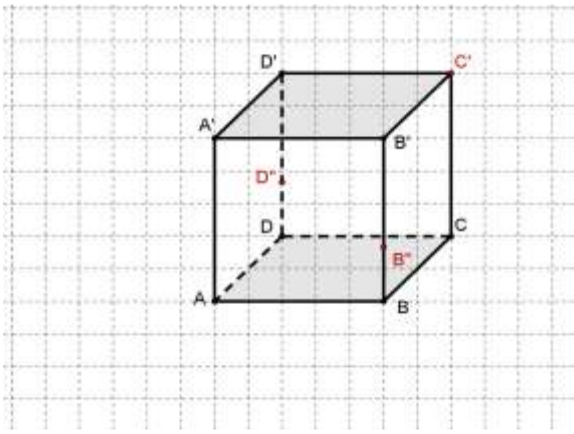
1. Метод следов.

> *Следом* называют прямую пересечения плоскости сечения и плоскости какой-либо грани многогранника. Чтобы построить след, достаточно знать две его точки, т. е. точки, лежащие одновременно в секущей плоскости и плоскости □ рассматриваемой грани. Метод следов заключается в следующем. Сначала строят на основной плоскости след секущей плоскости (причем за основную плоскость принимают большей частью плоскость основания геометрического тела). Затем, используя след секущей плоскости, находят точки встречи ребер многогранника с секущей плоскостью. Используя полученные (и данные) точки, получают следы секущей плоскости на гранях многогранника.

Пример 1

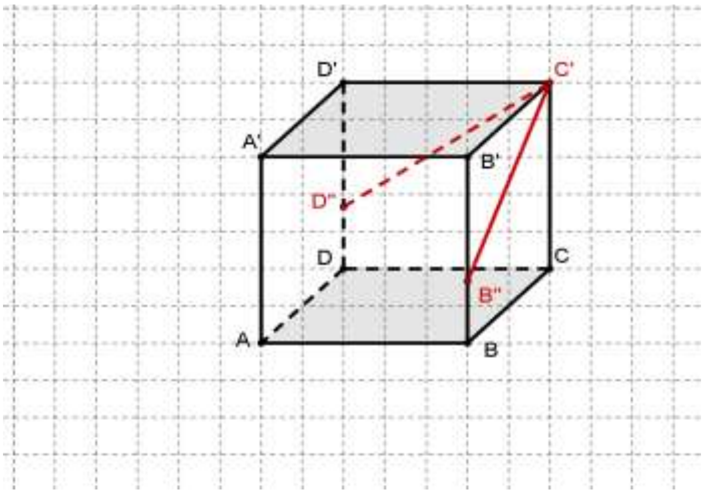
Построить сечение куба *ABCDA'B'C'D'* плоскостью (*C'D''B''*)

.

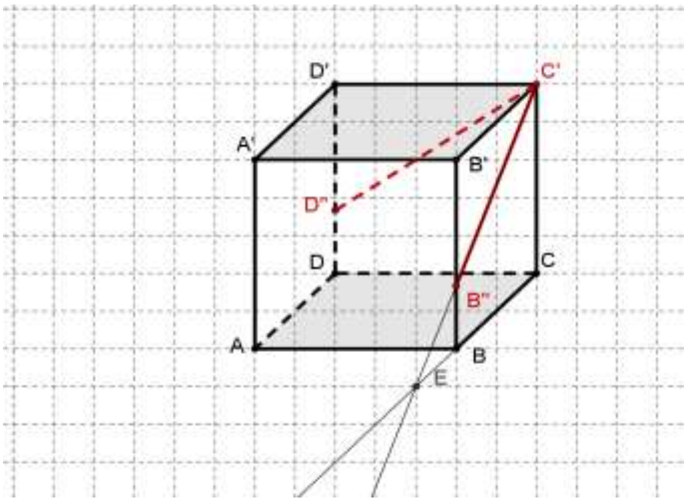


Решение

1. Построим куб *ABCDA'B'C'D'* и отметим точку D'' на ребре DD' и точку B'' – на BB'.
2. Проводим отрезки C'B'' а также C'D'', т.к. они лежат в одной плоскости

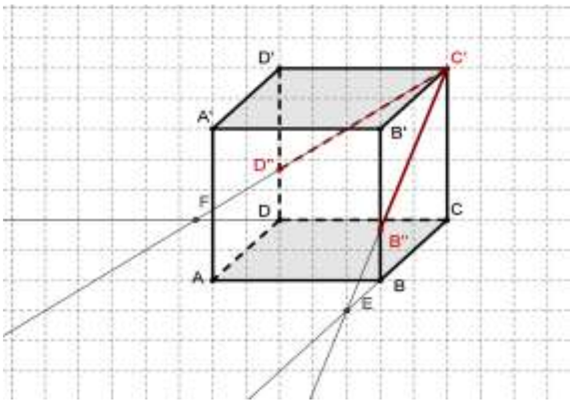


3. Находим точку *E* пересечения продолжения отрезков *CB* и *C'B''*

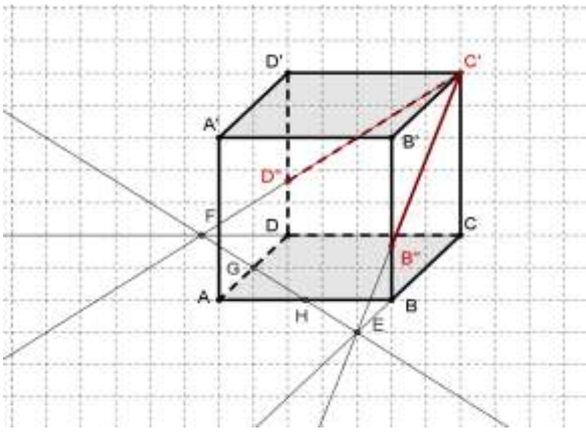


4. Находим точку *F* пересечения продолжения отрезков *CD* и *C'D''*

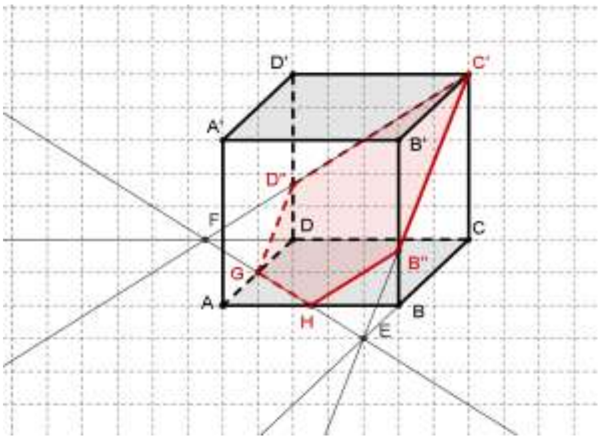
.



5. Прямая *FE* пересекает рёбра *AD* и *AB* в точках *G* и *H* соответственно



6. *C'D''GHB''*- искомое сечение



Пример 2.

На рёбрах AB, BD и CD тетраэдра ABCД отмечены точки M, N, P. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

Решение.

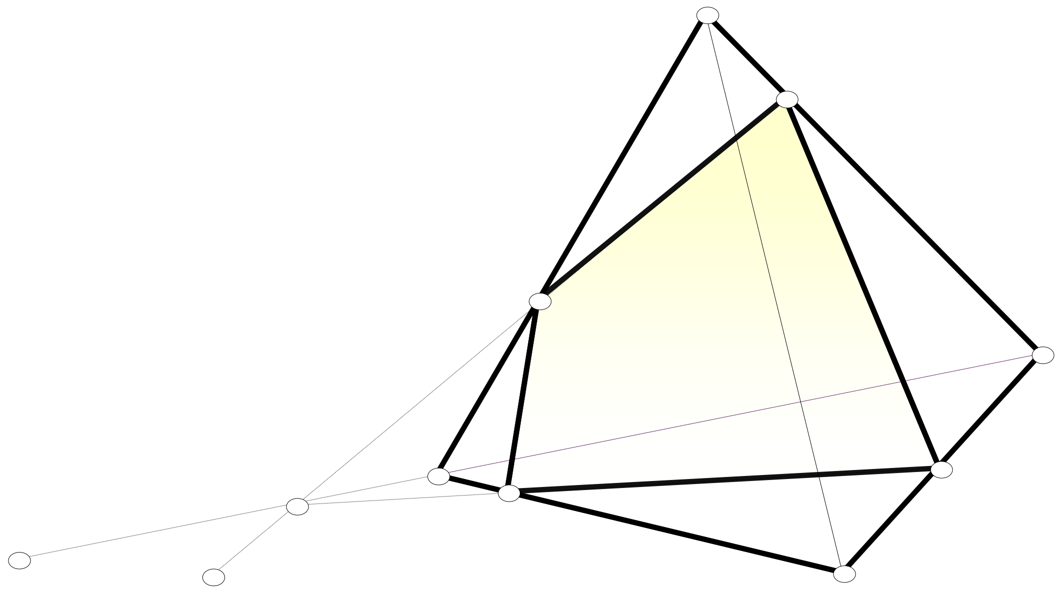
1.Построим прямую ME, по которой пересекаются плоскости MNP и ABC.

2. Точка M является их общей точкой.

3. Продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E.

4.Прямая ME пересекает ребро AC в точке T.

5.Четырёхугольник MNPT- искомое сечение.



Пример 3.

Построить в треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сечение, проходящее через ребро AB и середину A_1C_1.

Решение.

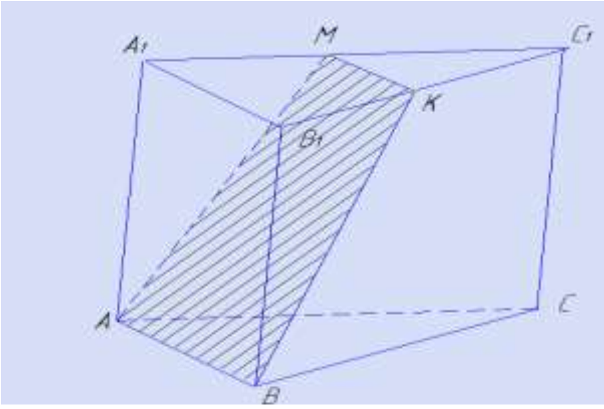
Пусть M – серединаA_1C_1. Выясним, что в секущей плоскости и грани AA_1C_1C лежат одновременно точки A и M. Значит, секущая плоскость пересекает грань AA_1C_1C по прямой AM.

Определим линию пересечения секущей плоскости и плоскости ($A_1B_1C_1$). Так как плоскость ($A_1B_1C_1$) имеет с секущей плоскостью одну общую точку M, то они пересекаются по прямой, содержащей точку M. Но как проходит эта прямая? Секущая плоскость проходит через AB, но AB параллельна A_1B_1. Следовательно, секущая плоскость пересекает плоскость ($A_1B_1C_1$) по прямой MK, параллельной A_1B_1, где K-точка пересечения прямых MK и B_1C_1

Точки K и B принадлежат одновременно грани BB_1C_1C и секущей плоскости. Следовательно, прямая KB является прямой пересечения секущей плоскости и грани BB_1C_1C.

Четырёхугольник AMKB является сечением призмы.

.



2. Метод параллельных прямых

В основу метода положено свойство параллельных плоскостей «Прямые, по которым плоскость пересекает данные параллельные плоскости, параллельны между собой».

Пример: Дано изображение пятиугольной призмы ABCDEA1B1C1D1E1. Точка K принадлежит прямой AA1 , M принадлежит прямой CC1

Постройте сечение призмы плоскостью KBM.

Решение

Через ребро AA1 проводим плоскость a, параллельную грани BCC1B1. Получаем:

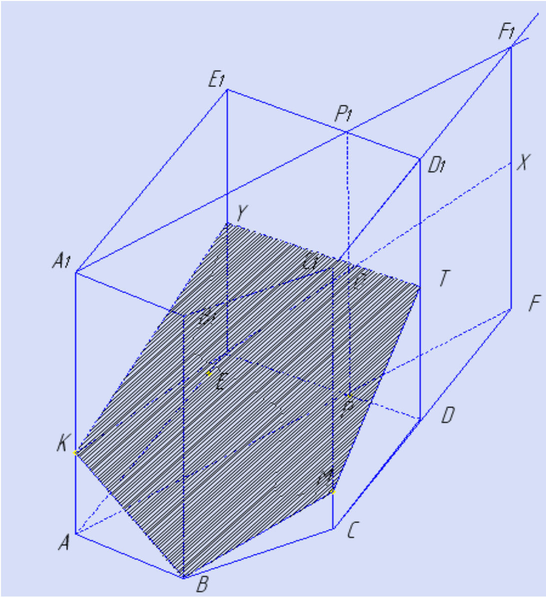
Точка P – точка пересечения прямой ED и плоскости a, P1 – точка пересечения прямой E1D1 и плоскости a, F – точка пересечения прямой CD и плоскости a, F1 – точка пересечения прямой C1D1 и плоскости a.

Очевидно, что A1F1 параллельна B1C1 и AF параллельна BC.

Так как плоскость a параллельна грани BCC1B1, то секущая плоскость KBM пересечёт плоскость a по прямой KX, параллельной BM (X принадлежит прямой FF1). Получаем, что прямая PP1 пересекает прямую KX в точке O, а прямая MX пересекает прямую DD1 в точке T, прямая EE1 пересекает прямую TO в точке Y.

Прямоугольник KBMTY – искомое сечение данной призмы.

.



Задания для самостоятельной работы

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка М принадлежащая грани DD_1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и М и найти линию пересечения секущей плоскости с плоскостью основания куба.
2. Точки M, N и K принадлежат соответственно ребрам SB,SA и SC пирамиды SABCD. Построить сечение пирамиды плоскостью MNK.

5. 6. Моделирование в среде Geogebra

Цель: изучение возможностей среды Geogebra по построению интерактивных моделей и проведения компьютерного эксперимента

1. Нахождение геометрического места точек

Задача. В заповеднике где-то на Круглом озере есть маяк. Катер береговой охраны патрулирует озеро. Найдите траекторию его движения, если расстояние от катера до берега и от катера до маяка все время одинаковое. Исследуйте, как меняется траектория в зависимости от расположения маяка.

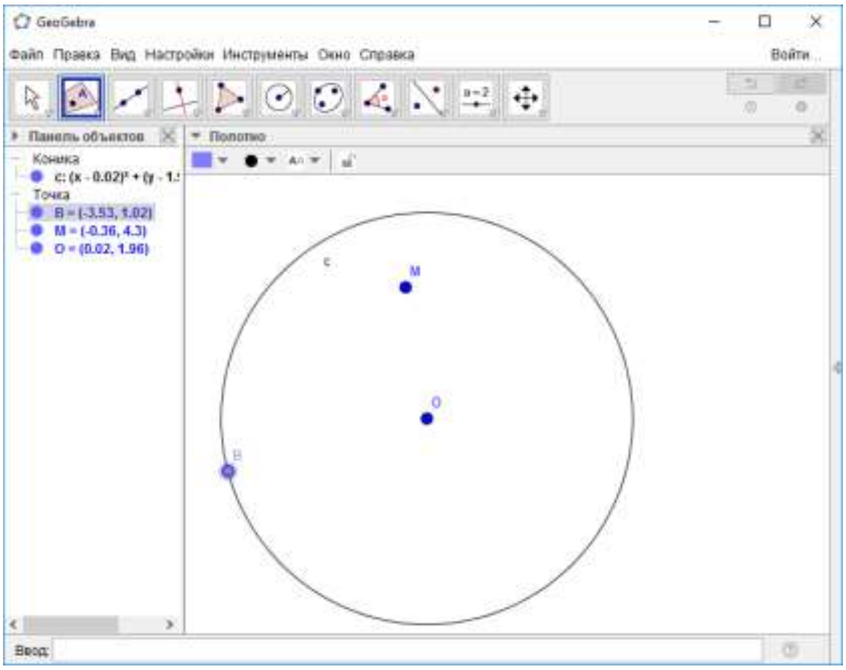
Выполнение.

1 этап. Формализация.

Определить геометрическое место точек (ГМТ) центров окружностей, которые проходят через данную точку и касаются данной окружности.

2 Этап. Построение динамического чертежа.

1. Строим окружность с помощью инструмента Окружность по центру и радиусу
2. Строим произвольную точку М внутри окружности, используя инструмент Точка
3. Строим точку B, лежащую на окружности, с помощью инструмента Точка на объекте



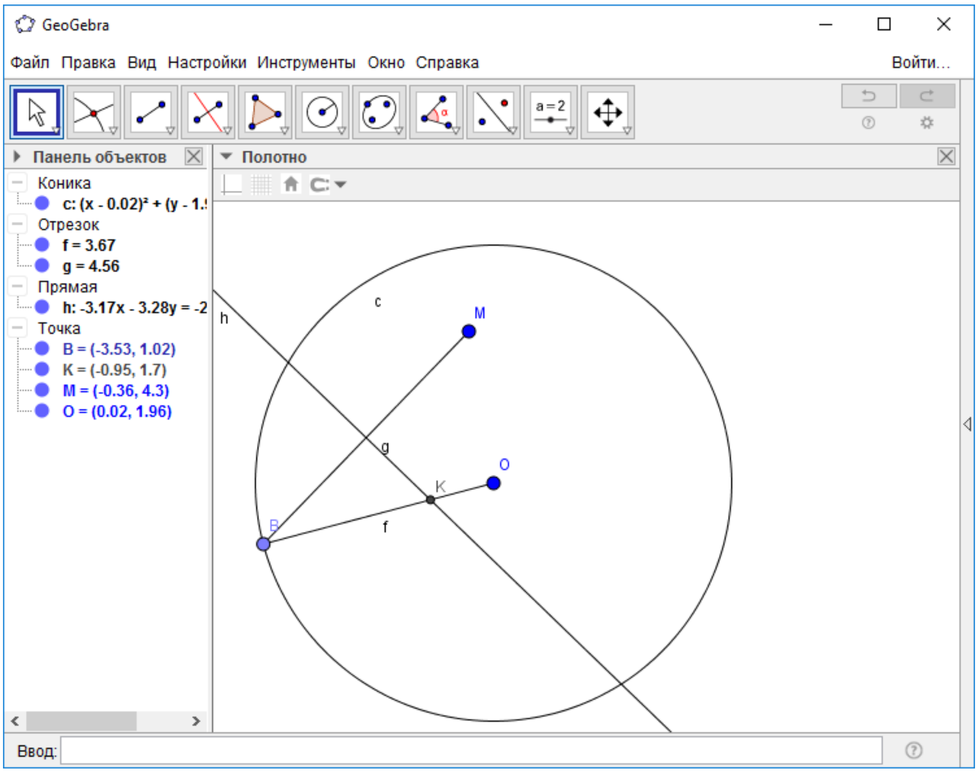
4. Соединяем точку B с центром окружности O, используя инструмент Отрезок

5. Таким же образом строим отрезок BM.

6. К получившемуся отрезку BM с помощью инструмента строим серединный перпендикуляр, так как геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных

точек, будет прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.

7. С помощью инструмента находим точку K как пересечение серединного перпендикуляра с отрезком OB. Полученная точка K и есть центр одной из окружностей, которая проходит через данную точку M и касается окружности в точке B



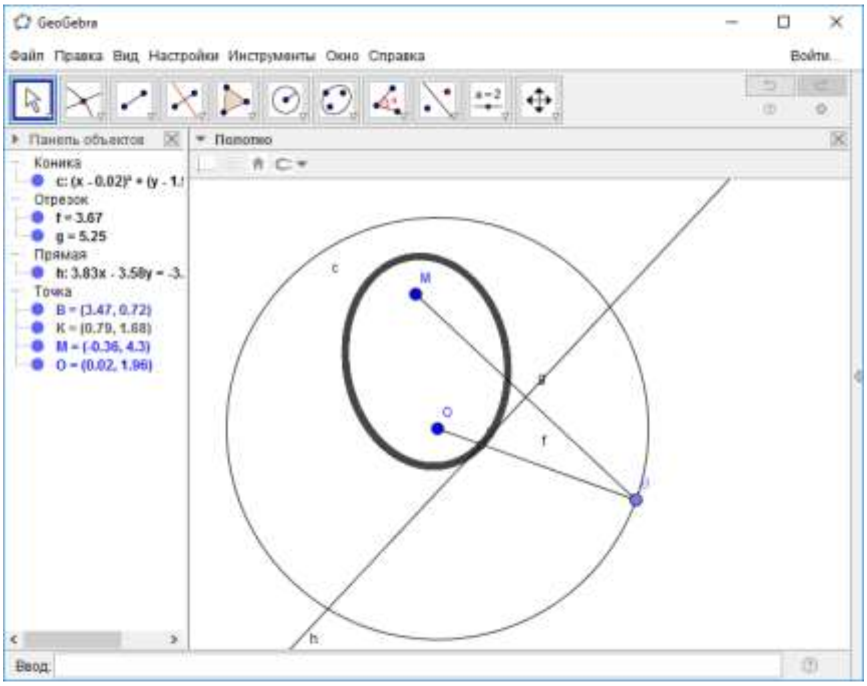
3 этап. Компьютерный эксперимент.

Цель эксперимента – найти ГМТ центров окружностей, которые проходят через данную точку и касаются окружности.

Ход эксперимента:

1. Правой кнопкой мыши щелкаем на точку K и в высветившемся меню выбираем пункт оставлять след.

2. Двигая точку B по окружности с помощью мыши, видим, что след точки K образует не что иное, как эллипс

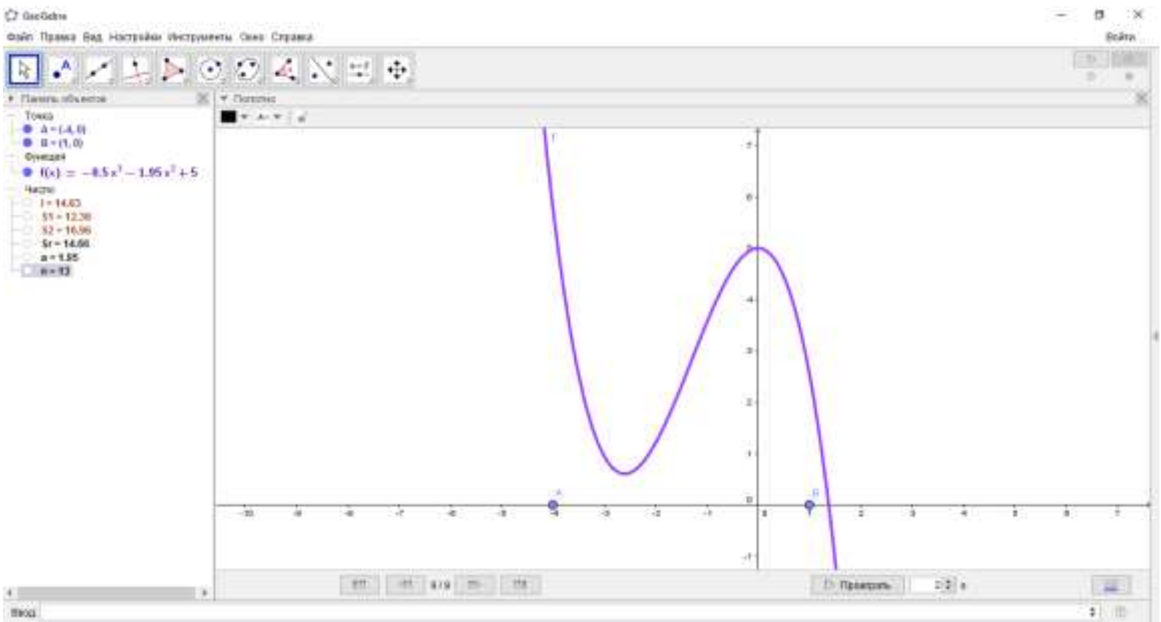


2. Вычисление площади криволинейной трапеции

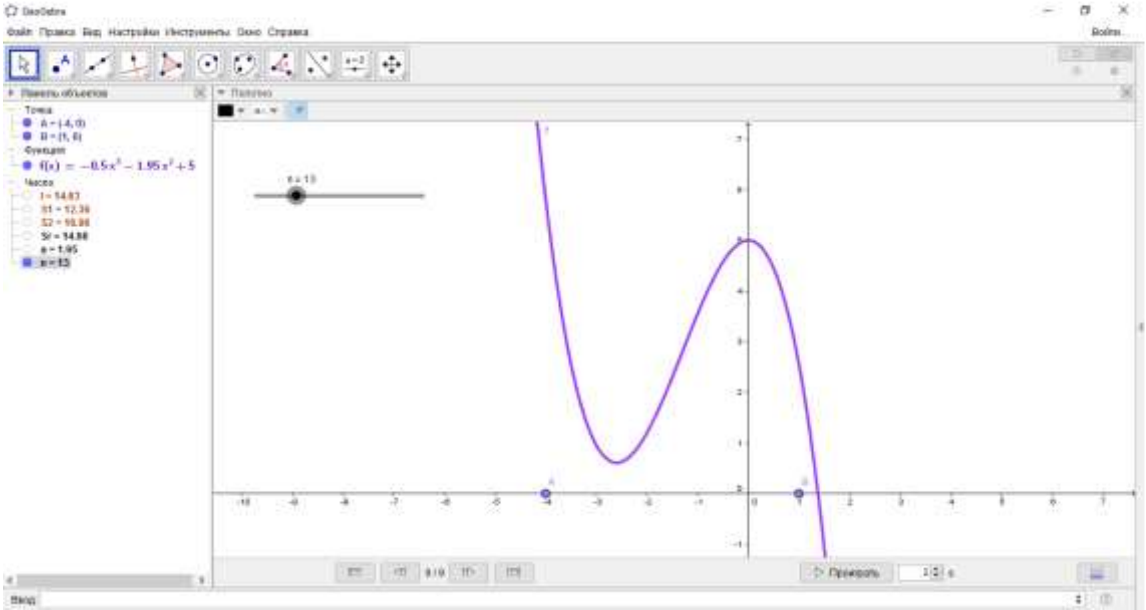
Режим Алгебра и Графики удобно использовать для введения новых понятий, в том числе и понятия интеграла. В этом упражнении рассмотрим вопрос вычисления площади криволинейной трапеции и введения понятия определенного интеграла, причем подойдем к нему в геометрическом смысле.

Выполнение

1. Введите в поле алгебраического ввода уравнение произвольной кубической функции, например: $f(x) = -0.5x^3 - 2x^2 + 5$ и нажмите кнопку Enter.
2. Отметьте точки А и В на оси абсцисс, используя инструмент Точка.

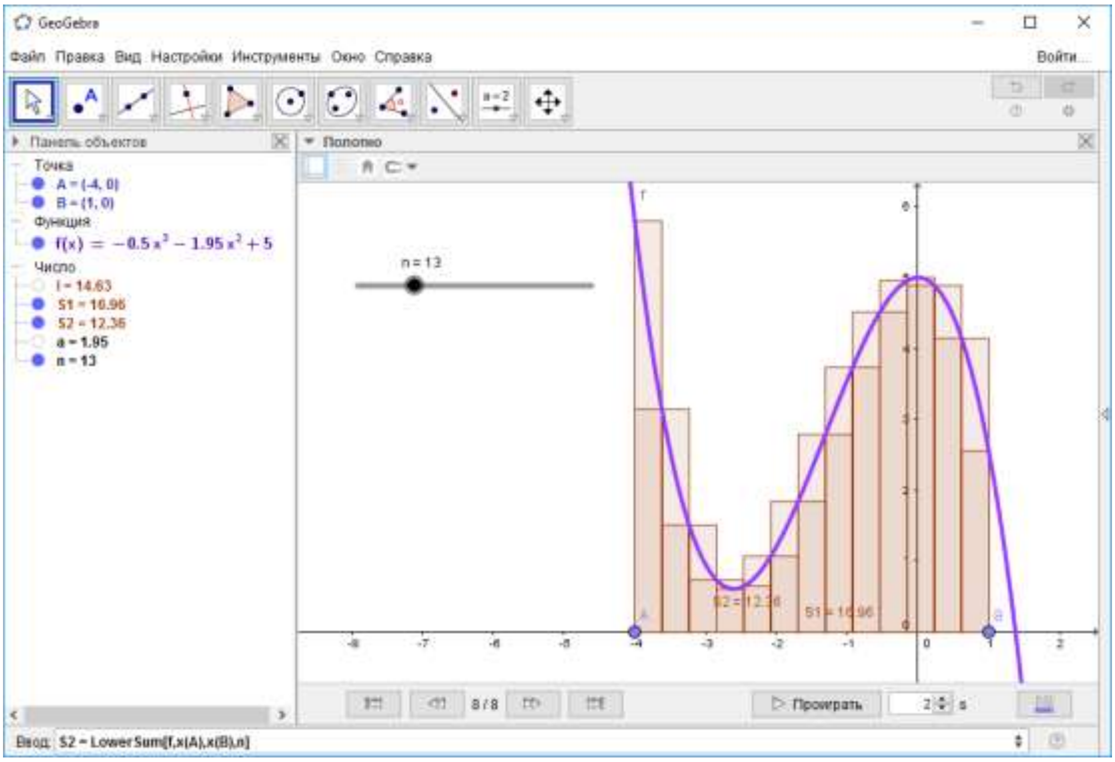


3. Создайте ползунок n, используя инструмент Ползунок. Установите минимальное значение 1, а максимальное – 50, с шагом 1.

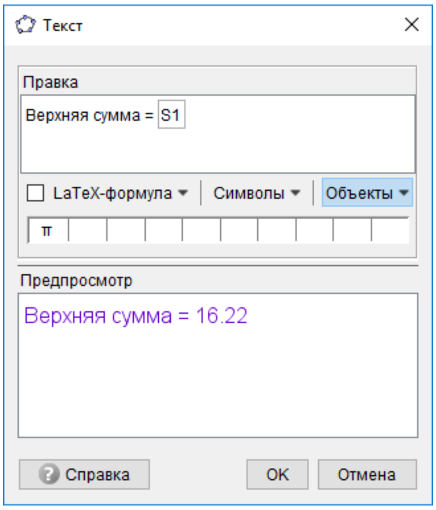


4. Введите команду S1 = UpperSum[f,x(A),x(B),n] и команду S2 = LowerSum[f,x(A),x(B),n] для вычисления верхней и нижней суммы Дарбу.

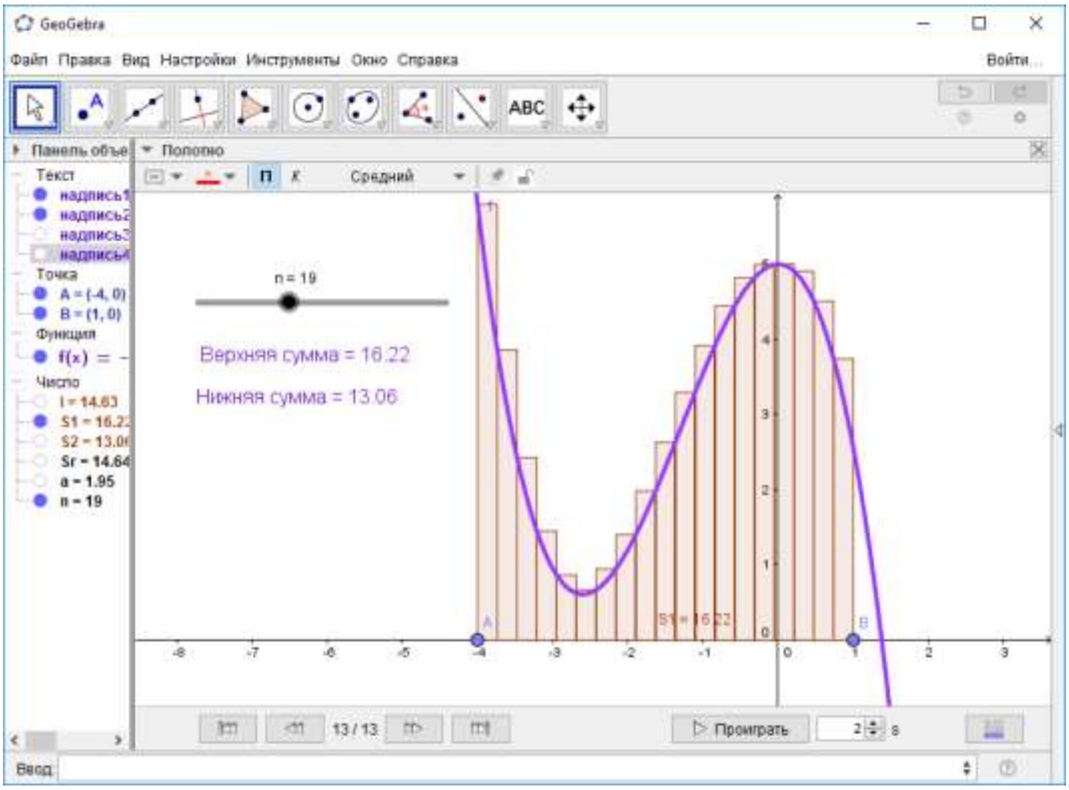
Подсказка: x(A) – возвращает координату точки A по оси абсцисс



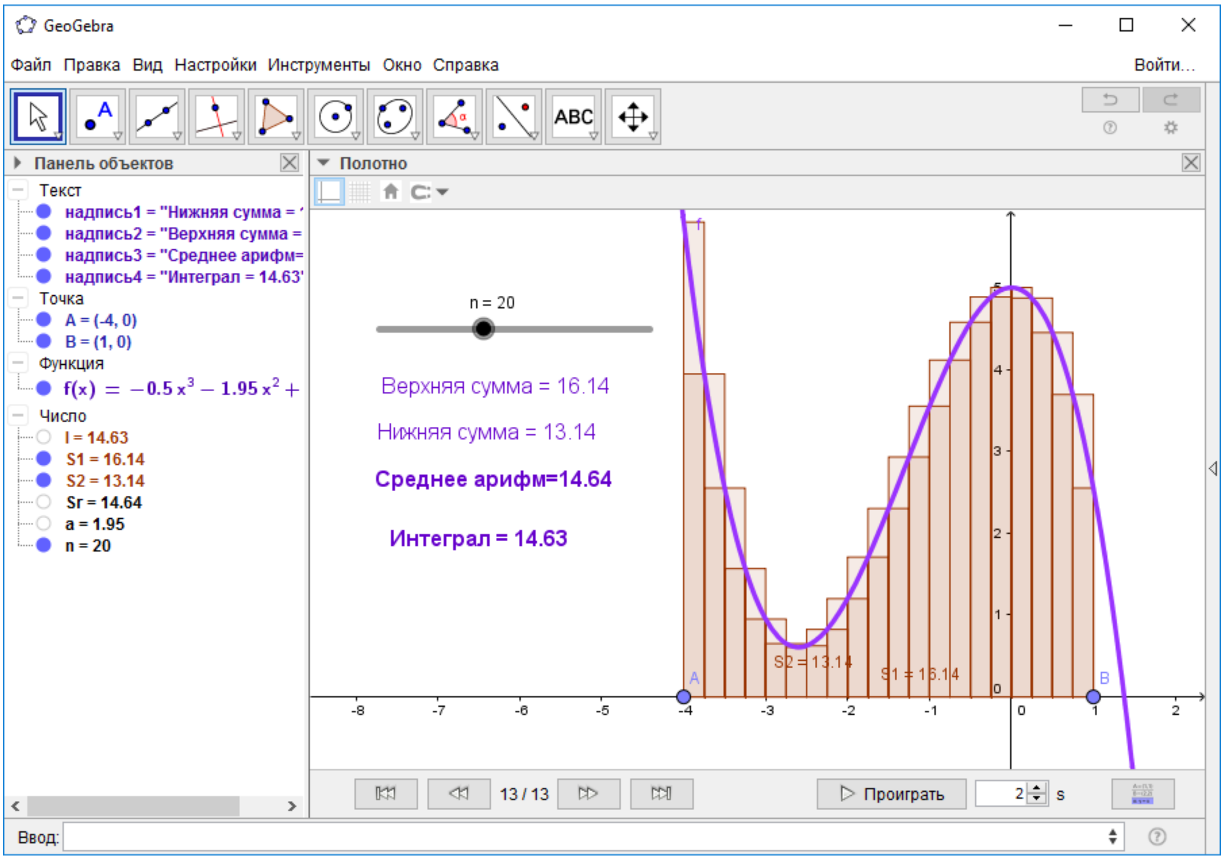
5. Создайте динамический текст для отображения на экране верхней и нижней суммы. Используя инструмент Текст, создайте текстовое поле, введите текст «Верхняя сумма =», а затем в списке Объекты укажите соответствующую переменную S1. Нажмите кнопку ОК.



Аналогично создается надпись для нижней части.



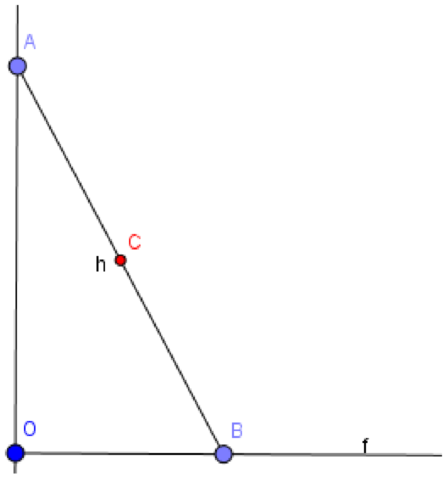
6. Для определения более точного значения площади криволинейной трапеции найдите среднее арифметическое верхней и нижней суммы: Sr=СреднееАрифметическое[S1,S2]. Добавьте соответствующий динамический текст.
7. Вычислите интеграл I=Интеграл[f, x(A),x(B)] и добавьте динамический текст.



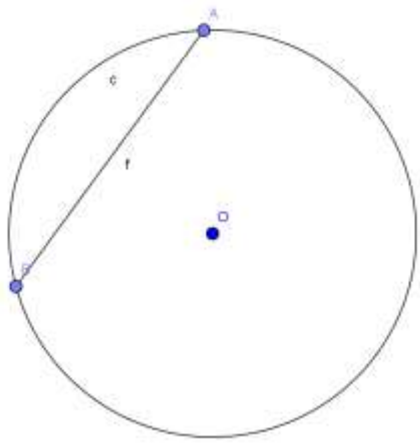
Задания для самостоятельной работы

1. На середине лестницы, приставленной к стене, сидит котенок. По какой траектории будет двигаться котенок, если лестница начнет скользить по полу?

Подсказка: найти ГМТ середины отрезка фиксированной длины, концы которого расположены на сторонах прямого угла.



2. Найдите геометрическое место середин всех хорд данной окружности, если:
   а) точка А фиксирована
   б) длина отрезка АВ фиксирована



3. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $f(x)= e^{\sin(x+2)}$, x=-2, x=4 и сравнить со значением соответствующего определенного интеграла