

**Лабораторные работы по дисциплине  
«Теоретические основы информатики»**

**Оглавление**

1. Позиционные системы счисления. Перевод чисел из одной системы счисления в другую. ....	2
2. Основные арифметические действия в различных системах счисления. ....	12
3. Измерение информации. ....	21
1. Единицы измерения количества информации. ....	21
2. Содержательный подход к измерению количества информации. ....	22
3. Алфавитный подход к измерению количества информации. ....	23
4. Логические основы ЭВМ. ....	30
5. Алгоритм. Способы записи, основные типы алгоритмов. ....	36
6. Машина Поста. Машина Тьюринга. ....	48

# 1. Позиционные системы счисления. Перевод чисел из одной системы счисления в другую.

## Теоретические сведения

Система счисления – способ наименования и изображения чисел с помощью символов, имеющих определенные количественные значения. Различают непозиционные и позиционные системы счисления. В непозиционной системе счисления цифры не меняют своего количественного значения при изменении их расположения в числе (например, римская система счисления). Тем самым исключается всякая возможность автоматизации распознавания чисел и, как следствие, обработки информации. Этому недостатка лишена позиционная система счисления, в которой значение каждой цифры зависит от ее места (позиции) в числе.

Позиционные системы счисления характеризуются:

- основанием  $P$  системы счисления – количеством ( $P$ ) различных символов, используемых для изображения чисел. Значения этих символов лежат в пределах от 0 до  $P-1$ ;
- разрядом – позицией, занимаемой отдельным символом в изображении числа. Разряды нумеруются справа налево, начиная с 0;
- весом разряда – количественным значением одной единицы разряда.

Любое число  $C$  в позиционной системе счисления с основанием  $P$  может быть представлено в виде полинома:

$$C = \underbrace{C_m P^m + C_{m-1} P^{m-1} + \dots + C_1 P^1 + C_0 P^0}_{\text{целая часть числа}} + \underbrace{C_{-1} P^{-1} + C_{-2} P^{-2} + \dots + C_{-s} P^{-s}}_{\text{дробная часть числа}},$$

или где в качестве  $C_i$  могут стоять любые из  $P$  цифр алфавита, а нижние индексы определяют местоположение цифры в числе (разряд)

Численно вес разряда определяется через основание  $P$  системы счисления и номер  $i$  разряда:  $P^i$ . Таким образом, максимальное целое число, которое может быть представлено в  $m$  разрядах  $N_{\max} = P^m - 1$ .

Минимальное значащее (не равное 0) число, которое можно записать в  $s$  разрядах дробной части  $N_{\min} = P^{-s}$ . Тогда, имея в целой части числа  $m$ , а в дробной  $s$  разрядов, можно представить  $P^{m+s}$  чисел от 0 до  $P^{m+s}-1$ .

Поскольку в технике известно много физических приборов и сред с двумя устойчивыми состояниями, в качестве алфавита языка ЭВМ приняты символы 0 и 1, названные двоичными цифрами. Последовательности нулей и единиц конечной длины образуют двоичные числа, которые, в свою очередь, образуют позиционную двоичную систему счисления.

В вычислительной технике применяют позиционные системы счисления с недесятичным основанием: двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную и др. Для обозначения используемой системы счисления числа заключают в скобки и индексом указывают основание системы счисления:  $15_{(10)}$ ,  $1011_{(2)}$ ,  $735_{(8)}$ ,  $1EA9F_{(16)}$ . Иногда скобки опускают и оставляют только индекс:  $15_{10}$ ,  $1011_2$ ,  $735_8$ ,  $1EA9F_{16}$ . Есть еще один способ обозначения системы счисления: при помощи латинских букв добавляемых после числа. Например, 15 D; 1011 B; 735 Q; 1EA9F H.

*Двоичная система счисления.* Основание  $P=2$ . Алфавит включает две двоичные цифры: 0, 1. Веса разрядов в двоичной системе счисления равны 1, 4, 8, 16,... влево от запятой и 0,5; 0,25; 0,125; 0,625;... вправо от запятой.

Двоичная система счисления имеет ряд преимуществ перед другими системами:

- для ее реализации нужны **технические устройства с двумя устойчивыми состояниями** (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);
- представление информации посредством только двух состояний **надежно и помехоустойчиво**;
- возможно **применение аппарата булевой алгебры** для выполнения логических преобразований информации;
- двоичная арифметика намного проще десятичной.

Недостаток двоичной системы — **быстрый рост числа разрядов**, необходимых для записи чисел.

Таблица 1

Двоичная (Основание 2)	Восьмеричная (Основание 8)		Десятичная (Основание 10)	Шестнадцатеричная (Основание 16)	
		триады			тетрады
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
	2	010	2	2	0010
	3	011	3	3	0011
	4	100	4	4	0100
	5	101	5	5	0101
	6	110	6	6	0110
	7	111	7	7	0111
			8	8	1000
			9	9	1001
				A	1010
				B	1011
				C	1100
				D	1101
				E	1110
				F	1111

*Восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления используются при составлении программ на языке машинных кодов для более короткой и удобной записи двоичных кодов — команд, данных, адресов и операндов. Алфавит восьмеричной системы счисления включает цифры от 0 до 7. Алфавит шестнадцатеричной системы счисления включает цифры от 0 до 9, для изображения цифр, больших 9, применяются латинские буквы A, B, C, D, E, F.*

*Двоично-десятичная система счисления получила большое распространение в современных ЭВМ ввиду легкости перевода в десятичную систему и обратно. Она используется там, где основное внимание уделяется не простоте технического построения машины, а удобству работы пользователя. В этой системе счисления все десятичные цифры отдельно кодируются четырьмя двоичными цифрами.*

Примеры.

- 1) Десятичное число 9703 в двоично-десятичной системе выглядит так:  
1001 0111 0000 0011<sub>2</sub>.
- 2) Десятичное число 6251 в двоично-десятичной системе выглядит так:  
0110 0010 0101 0001<sub>2</sub>.

Рассмотрим общие правила перевода чисел из одной системы счисления в другую. Эти правила зависят от того, в какой системе счисления осуществляются арифметические операции, связанные с преобразованием чисел, - в той, в которой представлено исходное число, или в той, в которую оно переводится.

**Правило 1.** Перевод чисел в десятичную систему счисления.

Любое число в позиционной системе счисления можно представить в виде суммы степеней:

$S = C_m P^m + C_{m-1} P^{m-1} + \dots + C_1 P^1 + C_0 P^0 + C_{-1} P^{-1} + \dots + C_{-s} P^{-s}$ , где  $P$  - основание,  $C$  - коэффициенты,  $i$  - номера разрядов выражены в новой системе. Первая позиция слева от делителя целой и дробной части имеет номер 0, слева от неё находится первая позиция, ещё левее - вторая и т.д. Первая позиция справа от делителя имеет номер -1, следующая за ней - номер -2 и т.д. Все действия надо выполнять в новой системе.

Примеры.

$${}^{3\ 2\ 1\ 0\ -1\ -2} 1101,01_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 8 + 4 + 1 + 0,25 = 13,25_{10}$$

$${}^{1\ 0\ -1\ -2} 52,25_8 = 5 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} + 5 \cdot 8^{-2} = 40 + 2 + 0,25 + 0,078 = 42,328_{10}$$

$${}^{2\ 1\ 0\ -1} 1A9,4_{16} = 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 + 4 \cdot 16^{-1} = 256 + 160 + 9 + 0,25 = 425,25_{10}$$

**Правило 2.** Перевод десятичных чисел в другую систему счисления.

Для перевода целого десятичного числа применяется следующее правило:

1. Разделить число на основание той системы счисления, в которую осуществляется перевод: выделить целую часть частного и остаток от деления. Остаток будет младшим разрядом искомого числа;
2. Целую часть частного снова разделить на основание системы счисления. Остаток от деления будет следующим разрядом числа;
3. Продолжать процесс до тех пор, пока целая часть частного не станет равной нулю.

Примеры.

- 1) Перевести десятичное число 356 в двоичную систему счисления.

$$356_{10} = 101100100_2$$

$$\begin{array}{r}
 356 \mid 2 \\
 \hline
 2 \mid 178 \mid 2 \\
 \hline
 15 \mid 16 \mid 89 \mid 2 \\
 \hline
 14 \mid 18 \mid 8 \mid 44 \mid 2 \\
 \hline
 16 \mid 18 \mid 9 \mid 4 \mid 22 \mid 2 \\
 \hline
 16 \mid \underline{0} \mid 8 \mid 4 \mid 2 \mid 11 \mid 2 \\
 \hline
 \underline{0} \mid \underline{1} \mid 4 \mid 2 \mid 10 \mid 5 \mid 2 \\
 \hline
 \underline{0} \mid \underline{0} \mid 2 \mid 2 \mid \underline{1} \mid 4 \mid 2 \mid 2 \\
 \hline
 \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{1} \mid 2 \mid 2 \mid 2 \\
 \hline
 \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{1} \mid 2 \mid 2 \\
 \hline
 \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{0} \mid \underline{1} \mid 2 \\
 \hline
 \underline{0} \mid \underline{1}
 \end{array}$$

- 2) Перевести десятичное число 625 в восьмеричную систему счисления.

$$625_{10} = 1161_8$$

$$\begin{array}{r}
 625 \mid 8 \\
 \hline
 56 \mid 78 \mid 8 \\
 \hline
 65 \mid 72 \mid 9 \mid 8 \\
 \hline
 64 \mid \underline{6} \mid 8 \mid \underline{1} \\
 \hline
 \underline{1} \mid \underline{1} \mid \underline{1} \mid \underline{1}
 \end{array}$$

- 3) Перевести десятичное число 182 в шестнадцатеричную систему счисления.

$$182_{10} = B6_{16}$$

$$\begin{array}{r|l} 182 & 16 \\ \hline 16 & \underline{11} = \underline{B} \\ 22 & \\ 16 & \\ \hline & \underline{6} \end{array} \quad \leftarrow$$

**Правило 3.** Перевод дробной части десятичных чисел в другую систему счисления.

Чтобы перевести дробную часть десятичных чисел в другую систему счисления, нужно выполнить следующие действия:

1. Умножить исходную дробь на основание системы счисления, в которую осуществляется перевод. Целая часть произведения будет старшим разрядом дробной части числа (позиция номер -1);
2. Дробную часть произведения снова умножить на основание системы счисления. Целая часть этого произведения будет следующим разрядом дроби (позиция номер -2);
3. Продолжать процесс до тех пор, пока дробная часть очередного произведения не станет равной нулю, или пока не будет достигнута нужная точность числа.

Примеры.

- 1) Перевести десятичное число 0,25 в двоичную систему счисления

$$0,25_{10} = 0,01_2$$

$$0,25 \cdot 2 = \underline{0},5;$$

$$0,5 \cdot 2 = \underline{1},0$$

0 – старший разряд двоичной дроби;

1 – следующий разряд.

- 2) Перевести десятичное число 0,53 в двоичную систему счисления с точностью до шестого знака после запятой.

$$0,53_{10} = 0,100001_2$$

$$0,53 \cdot 2 = \underline{1},06;$$

$$0,06 \cdot 2 = \underline{0},12$$

$$0,12 \cdot 2 = \underline{0},24$$

$$0,24 \cdot 2 = \underline{0},48$$

$$0,48 \cdot 2 = \underline{0},96$$

$$0,96 \cdot 2 = \underline{1},92$$

- 3) Перевести десятичное число 0,13 в восьмеричную систему счисления с точностью до шестого знака после запятой.

$$0,13_{10} = 0,102436_8$$

$$0,13 \cdot 8 = \underline{1},04$$

$$0,04 \cdot 8 = \underline{0},32$$

$$0,32 \cdot 8 = \underline{2},56$$

$$0,56 \cdot 8 = \underline{4},48$$

$$0,48 \cdot 8 = \underline{3},84$$

$$0,84 \cdot 8 = \underline{6},72$$

- 4) Перевести десятичное число 0,96 в восьмеричную систему счисления с точностью до пятого знака после запятой.

$$0,96_{10} = 0,75341_8$$

$$0,96 \cdot 8 = \underline{7},68$$

$$0,68 \cdot 8 = \underline{5},44$$

$$0,44 \cdot 8 = \underline{3},52$$

$$0,52 \cdot 8 = \underline{4},16$$

$$0,16 \cdot 8 = \underline{1},28$$

5. Перевести десятичное число 0,891 в шестнадцатеричную систему счисления с точностью до пятого знака после запятой.

$$0,891_{10} = 0,E4189_{16}$$

$$0,891 \cdot 16 = \underline{14},256$$

$$0,256 \cdot 16 = \underline{4},096$$

$$0,096 \cdot 16 = \underline{1},536$$

$$0,536 \cdot 16 = \underline{8},576$$

$$0,576 \cdot 16 = \underline{9},216$$

6. Перевести десятичное число 0,398 в шестнадцатеричную систему счисления с точностью до четвёртого знака после запятой.

$$0,398_{10} = 0,65E3$$

$$0,398 \cdot 16 = \underline{6},368$$

$$0,368 \cdot 16 = \underline{5},888$$

$$0,888 \cdot 16 = \underline{14},208$$

$$0,208 \cdot 16 = \underline{3},328$$



7. Перевести десятичное число 13,25 в двоичную систему счисления.

$$13,25_{10} = 1101,01_2$$

13	2		
12	6	2	
<u>1</u>	6	3	2
	<u>0</u>	2	1
		<u>1</u>	

$$0,25 \cdot 2 = \underline{0},5;$$

$$0,5 \cdot 2 = \underline{1},0$$



8. Перевести десятичное число 42,33 в восьмеричную систему счисления с точностью до двух знаков после запятой.

пятой.

$$42,33_{10} = 52,25_8$$

42	8
40	<u>5</u>
<u>2</u>	

$$0,33 \cdot 8 = \underline{2},64$$

$$0,64 \cdot 8 = \underline{5},12$$



9. Перевести десятичное число 425,77 в шестнадцатеричную систему счисления с точностью до трёх знаков после запятой.

$$425,77_{10} = 1A9,C51_{16}$$

425	16	
32	26	16
105	16	<u>1</u>
96	<u>10</u>	
<u>9</u>		

$$0,77 \cdot 16 = \underline{12},32$$

$$0,32 \cdot 16 = \underline{5},12$$

$$0,12 \cdot 16 = \underline{1},92$$



**Правило 4.** Перевод чисел из восьмеричной в двоичную систему счисления.

Для перевода числа из восьмеричной в двоичную систему счисления достаточно перевести каждый символ отдельно, а затем записать символы последовательно друг за другом, причём, каждое двоичное число, соответствующее одному восьмеричному символу, должно состоять из трёх разрядов – триад (т.к.  $8 = 2^3$ ). Пустые позиции в начале числа заполняются нулями.

Примеры.

1) Перевести восьмеричное число  $615,27_8$  в двоичную систему счисления:

$$6_8 = 110_2$$

$$1_8 = 001_2$$

$$5_8 = 101_2$$

$$2_8 = 010_2$$

$$7_8 = 111_2$$

$$615,27_8 = 110001101,010111_2$$

2) Перевести восьмеричное число  $173,54_8$  в двоичную систему счисления

$$1_8 = 001_2$$

$$7_8 = 111_2$$

$$3_8 = 011_2$$

$$5_8 = 101_2$$

$$4_8 = 100_2$$

$$173,54_8 = 001111011,101100_2$$

**Правило 5.** Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную.

Обратный перевод осуществляется следующим образом:

1. Двоичное число разбивается на триады. Разбивка выполняется вправо и влево от разделителя целой и дробной части. Неполные крайние триады дописываются нулями.
2. Выполняется перевод отдельно для каждой триады, получившиеся символы записываются последовательно друг за другом.

Примеры.

1) Перевести двоичное число  $10111001,01101_2$  в восьмеричную систему счисления.

$$\underbrace{101}_2 \underbrace{110}_2 \underbrace{001}_2, \overbrace{011}_2 \overbrace{010}_2 = 010 \mid 111 \mid 001 \mid, 011 \mid 010_2 = 271,32_8$$

2) Перевести двоичное число  $1011000011,1001_2$  в восьмеричную систему счисления.

$$\underbrace{101}_2 \underbrace{1000}_2 \underbrace{011}_2, \underbrace{100}_2 \underbrace{100}_2 = 001 \ 011 \ 000 \ 011, 100 \ 100_2 = 1303,44_8$$

**Правило 6.** Перевод чисел из шестнадцатеричной в двоичную систему счисления.

Для перевода числа из шестнадцатеричной в двоичную систему счисления достаточно перевести каждый символ отдельно, а затем записать символы последовательно друг за другом, причём, каждое двоичное число, соответствующее одному шестнадцатеричному символу, должно состоять из четырёх разрядов – тетрад (т.к.  $16 = 2^4$ ). Пустые позиции в начале числа заполняются нулями.

Примеры.

1) Перевести шестнадцатеричное число  $6F3,A5_{16}$  в двоичную систему счисления

$$6_{16} = 0110_2$$

$$F_{16} = 1111_2$$

$$3_{16} = 0011_2$$

$$A_{16} = 1010_2$$

$$5_{16} = 0101_2$$

$$6F3,A5_{16} = 011011110011,10100101_2$$

2) Перевести шестнадцатеричное число  $A39,F4_{16}$  в двоичную систему счисления

$$A_{16} = 1010_2$$

$$3_{16} = 0011_2$$

$$9_{16} = 1001_2$$

$$F_{16} = 1111_2$$

$$4_{16} = 0100_2$$

$$A_{39}, F_{4_{16}} = 101000111001, 11110100_2$$

**Правило 7.** Перевод чисел из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную.

Обратный перевод осуществляется следующим образом:

1. Двоичное число разбивается на тетрады. Разбивка выполняется вправо и влево от разделителя целой и дробной части. Неполные крайние тетрады дописываются нулями.
2. Выполняется перевод отдельно для каждой тетрады, получившиеся символы записываются последовательно друг за другом.

Примеры.

- 1) Перевести двоичное число  $111101,01101_2$  в шестнадцатеричную систему счисления.

$$\underbrace{1111}_4 \underbrace{01}_2 \underbrace{0110}_4 \underbrace{1_2} = 0011 \ 1101, 0110 \ 1000_2 = 3D,68_{16}$$

- 2) Перевести двоичное число  $1010000,01110_2$  в шестнадцатеричную систему счисления.

$$\underbrace{1010}_4 \underbrace{0000}_4, \underbrace{0111}_4 \underbrace{0000}_4 = 0101 \ 0000, 0111 \ 0000_2 = 50,7_{16}$$

**Правило 8.** Перевод чисел из восьмеричной в шестнадцатеричную систему счисления.

Перевод чисел из восьмеричной в шестнадцатеричную систему счисления удобно выполнять через двоичную систему счисления.

Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1. Восьмеричное число перевести в двоичное число, причём, каждое двоичное число, соответствующее одному восьмеричному символу, должно состоять из триад;
2. Полученное двоичное перевести в шестнадцатеричную систему счисления, разбив двоичное число на тетрады.

Примеры.

- 1) Перевести восьмеричное число  $534,713_8$  в шестнадцатеричную систему счисления.

$$534,713_8 = \underbrace{10101}_5 \underbrace{1100}_3 \underbrace{1100}_4, \underbrace{1110}_7 \underbrace{0101}_1 \underbrace{1_3} =$$

$$= 0001 \ 0101 \ 1100, 1110 \ 0101 \ 1000_2 = 15C,E58_{16}$$

- 2) Перевести восьмеричное число  $360,234_8$  в шестнадцатеричную систему счисления.

$$360,234_8 = \underbrace{0111}_3 \underbrace{1100}_6 \underbrace{0000}_0, \underbrace{0100}_2 \underbrace{1110}_3 \underbrace{0_4} =$$

$$= 0000 \ 1111 \ 0000, 0100 \ 1110 \ 0000_2 = F0,4E_{16}$$

**Правило 9.** Перевод чисел из шестнадцатеричной в восьмеричную систему счисления.

Перевод чисел из шестнадцатеричной в восьмеричную систему счисления удобно выполнять через двоичную систему счисления.

Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1. Шестнадцатеричное число перевести в двоичное число, причём, каждое двоичное число, соответствующее одному шестнадцатеричному символу, должно состоять из тетрад;
2. Полученное двоичное перевести в восьмеричную систему счисления, разбив двоичное число на триады.

Примеры.

- 1) Перевести шестнадцатеричное число  $A2C,3_{16}$  в восьмеричную систему счисления.

$$A2C,3_{16} = \underbrace{1010}_4 \underbrace{0001}_4 \underbrace{1001}_4, \underbrace{001}_3 \underbrace{1_2} = 101 \ 000 \ 101 \ 100, 001 \ 100_2 =$$

$$= 5054,14_8$$

2) Перевести шестнадцатеричное число CBF5,E6<sub>16</sub> в восьмеричную систему счисления.

$$\begin{aligned} \text{CBF5,E6}_{16} &= 1 \overbrace{100101}^{\text{C}_{16}} \overbrace{111110101}^{\text{B}_{16}} \overbrace{111}^{\text{F}_{16}} \overbrace{10011}^{\text{5}_{16}} \overbrace{10011}^{\text{E}_{16}} \overbrace{10}^{\text{6}_{16}} = \\ &= 001 \ 100 \ 101 \ 111 \ 110 \ 101, 111 \ 001 \ 100_2 = 145765,714_{16} \end{aligned}$$

### Примеры:

1. Укажите целое число от 8 до 11, двоичная запись которого содержит ровно две единицы. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.

#### Пояснение.

Представим все числа в двоичной системе счисления:

$$\begin{aligned} 8_{10} &= 1000_2, \\ 9_{10} &= 1001_2, \\ 10_{10} &= 1010_2, \\ 11_{10} &= 1011_2. \end{aligned}$$

Из чисел 9 и 10 выбираем число 10, поскольку оно является наибольшим.

2. Укажите целое число от 13 до 16, двоичная запись которого содержит наибольшее количество единиц.

#### Пояснение.

Переведём эти числа в двоичную систему счисления и сосчитаем количество единиц:

$$\begin{aligned} 13_{10} &= 1101_2; \\ 14_{10} &= 1110_2; \\ 15_{10} &= 1111_2; \\ 16_{10} &= 10000_2. \end{aligned}$$

Двоичная запись числа 15 содержит наибольшее количество единиц.

### Задания для самостоятельной работы

Отчет по практической работе представить в письменном виде с подробным описанием последовательности действий при выполнении заданий.

#### Задание 1.

Перевести числа из 2с/с, 8с/с, 16с/с в 10с/с по вариантам:

№ варианта	P = 2	P = 2	P = 8	P = 8	P = 16	P = 16
1.	1101010	10101,101	574	135,1	14C	2D,1
2.	1101110	11011,11	652	24,3	10F	6C,3
3.	1010101	10101,01	374	107,12	20C	1A,1
4.	1010111	1011,0111	431	104,1	1E0	1C,11
5.	11010101	1101,11	106	57,02	1C2	5E,11
6.	10110101	10111,01	227	116,12	1C4	10C,1

7.	10011101	1011,11	361	107,01	21F	1E,12
8.	1001011	1010,011	253	37,11	1C0	3A,01
9.	11100100	100101,1	327	175,1	17A	10B,1
10.	10101101	11001,11	174	116,01	2DE	2F,1
11.	10100101	10100,001	554	125,1	1CB	10D,2
12.	10101011	10111,011	710	126,11	A5D	1B,21
13.	11000111	101000,101	325	130,12	D91	1A,12
14.	10100110	10101,011	541	114,1	E5A	C4,1
15.	1100111	1100,01	371	57,011	A0F	5D,01

Задание 2.

Выполнить задания по вариантам. Перевести число из 10 с/с в 2 с/с по вариантам. При переводе дробной части получить 4 знака после запятой.

№ варианта	P = 10	P = 10
1.	136	178,35
2.	213	135,123
3.	123	126,29
4.	236	162,157
5.	147	186,64
6.	184	165,127
7.	199	146,142
8.	132	159,33
9.	101	149,201
10.	231	155,33
11.	177	175,391
12.	97,456	221,76
13.	139	123,521
14.	153	157,25
15.	201	198,76

Задание 3.

Выполнить задания по вариантам. Перевести числа из 2-й СС в 8-ю и 16-ю СС

№ варианта	P = 2	P = 2
1.	1100101010	101101,101
2.	1101110110	11011011,1101
3.	1010100111	1011001,001
4.	1010111101	1011101,0111
5.	11010010111	111001,100101
6.	101100101	1011001,101
7.	11001110110	110001111,101
8.	1001011011	1001110,011
9.	11100110010	11100101,100
10.	1101011011	11010011,101
11.	1001001010	1001001,0101
12.	101010110	1010011,011

13.	1100001110	1100010,10111
14.	1010011011	1010110,0110
15.	1100111011	1101011,0111

Задание 4.

А) Укажите целое число от 7 до 10, двоичная запись которого содержит ровно два значащих нуля. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.

Б) Укажите целое число от 30 до 35, двоичная запись которого содержит наибольшее количество единиц.



$$\begin{array}{r}
 \times 1001 \\
 \underline{101} \\
 1001 \\
 \underline{1001} \\
 101101
 \end{array}$$

Результат  $1001 \cdot 101 = 101101$ .

Деление двоичных чисел производится по тем же правилам, что и для десятичных. При этом используются таблицы двоичного умножения и вычитания.

Пример.  $1100.011 : 10.01 = ?$

$$\begin{array}{r}
 \underline{110001.1} \quad | \quad 1001 \\
 \underline{1001} \quad | \quad 101.1 \\
 \underline{1101} \\
 \underline{1001} \\
 \underline{1001} \\
 \underline{1001} \\
 \underline{1001} \\
 0
 \end{array}$$

Результат  $1100.011 : 10.01 = 101.1$ .

Примеры.

1) 
$$\begin{array}{r}
 110111,01 \\
 + 10011,10 \\
 \hline
 1001010,11
 \end{array}$$

2) 
$$\begin{array}{r}
 11011,10 \\
 - 1101,01 \\
 \hline
 1110,01
 \end{array}$$

3) 
$$\begin{array}{r}
 \times 1101 \\
 \underline{111} \\
 1101 \\
 + 1101 \\
 \underline{1101} \\
 1011011
 \end{array}$$

4) 
$$\begin{array}{r}
 11011101101 \quad | \quad 1001 \\
 \underline{1001} \quad | \quad 11000101 \\
 1001 \\
 \underline{1001} \\
 1011 \\
 \underline{1001} \\
 1001 \\
 \underline{1001} \\
 0
 \end{array}$$

Над числами в восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления можно производить арифметические операции. Для этого необходимо воспользоваться таблицами сложения и умножения.

Сложение.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15

7	7	10	11	12	13	14	15	16
---	---	----	----	----	----	----	----	----

Умножение.

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	И	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69

8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

### 1. Сложение.

Числа складываются поразрядно, начиная с младшего разряда, причём, если сумма цифр некоторого разряда превышает основание системы счисления, то к следующему разряду прибавляется единица, а в данный разряд записывается разность между полученной суммой и основанием системы счисления.

#### Примеры.

1).  $45_8 + 36_8 = 103_8$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 45 \\ + 36 \\ \hline 103 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5+6=11_{10}=1\cdot 8+3=13_8 \\ 4+3+1=8_{10}=1\cdot 8+0=10_8 \end{array}$$

5).  $38_{16} + 25_{16} = 5D_{16}$

$$\begin{array}{r} 38 \\ + 25 \\ \hline 5D \end{array} \quad \begin{array}{l} 8+5=13_{10}=D_{16} \\ 3+2=5 \end{array}$$

2).  $274_8 + 76_8 = 372_8$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 274 \\ + 76 \\ \hline 3722+1=3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4+6=10_{10}=1\cdot 8+2=12_8 \\ 1+7+7=15_{10}=1\cdot 8+7=17_8 \end{array}$$

6).  $78C_{16} + 9B_{16} = 827_{16}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 78C \\ + 9B \\ \hline 827 \end{array} \quad \begin{array}{l} C+B=12+11=23_{10}=1\cdot 16+7=17_{16} \\ 1+8+9=18_{10}=1\cdot 16+2=12_{16} \end{array}$$

3).  $521_8 + 377_8 = 1120_8$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 521 \\ + 377 \\ \hline 11201+5+3=9_{10}=1\cdot 8+1=11_8 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1+7=8_{10}=1\cdot 8+0=10_8 \\ 1+2+7=10_{10}=1\cdot 8+2=12_8 \end{array}$$

7).  $B8C4_{16} + F9D_{16} = C861_{16}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ + B8C4 \\ + F9D \\ \hline C861 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4+D=4+13=17_{10}=1\cdot 16+1=11_{16} \\ 1+C+9=1+12+9=22_{10}=1\cdot 16+6=16_{16} \\ 1+8+F=1+8+15=24_{10}=1\cdot 16+8=18_{16} \\ 1+B=1+11=12_{10}=C_{16} \end{array}$$

4).  $1A,24_{16} + 31,B5_{16} = 4B,D9_{16}$

$$\begin{array}{r} 1A,24 \\ + 31,B5 \\ \hline 4B,D9 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4+5=9 \\ 2+B=2+11=13_{10}=D_{16} \\ A+1=10+1=11_{10}=B_{16} \\ 1+3=4 \end{array}$$

8).  $F47_{16} + D98_{16} = 1CDF_{16}$

$$\begin{array}{r} F47 \\ + D98 \\ \hline 1CDF \end{array} \quad \begin{array}{l} 7+8=15=F \\ 4+9=13=D \\ F+D=15+13=28_{10}=1\cdot 16+12=1C_{16} \end{array}$$

### 2. Вычитание.

Вычитание, так же как и сложение, выполняется поразрядно, начиная с младшего разряда. Если в некотором разряде уменьшаемое меньше вычитаемого, то «занимается» единица из старшего разряда, т.е. старший разряд уменьшается на единицу, а данный разряд увеличивается на число, равное основанию системы счисления.

#### Примеры.

$$1). \quad 235_8 - 71_8 = 144_8$$

$$\begin{array}{r} \cdot 8 \\ \underline{235} \quad 5-1=4 \\ \underline{71} \quad 8+3-7=4 \\ 144 \end{array}$$

$$5). \quad A5_{16} - 19_{16} = 8C_{16}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 16 \\ \underline{A5} \quad 16+5-9=12_{10}=C_{16} \\ \underline{19} \\ 8C \end{array}$$

$$2). \quad 213_8 - 46_8 = 145_8$$

$$\begin{array}{r} \cdot \cdot 8 \\ \underline{213} \quad 8+3-6=5 \\ \underline{46} \quad 8+0-4=4 \\ 145 \end{array}$$

$$6). \quad 57C_{16} - 8F_{16} = 4ED_{16}$$

$$\begin{array}{r} \cdot \cdot 16 \\ \underline{57C} \quad 16+C-F=16+12-15=13_{10}=D_{16} \\ \underline{8F} \quad 16+6-8=14_{10}=E_{16} \\ 4ED \end{array}$$

$$3). \quad 1435_8 - 746_8 = 467_8$$

$$\begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot 8 \\ \underline{1435} \quad 8+5-6=7 \\ \underline{746} \quad 8+2-4=6 \\ 4678+3-7=4 \end{array}$$

$$7). \quad 9A23_{16} - ABC_{16} = 8F67_{16}$$

$$\begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot 16 \\ \underline{9A23} \quad 16+3-C=16+3-12=7 \\ \underline{ABC} \quad 16+1-B=16+1-11=6 \\ 8F67 \quad 16+9-A=15_{10}=F_{16} \end{array}$$

$$4). \quad 321_8 - 23_8 = 276_8$$

$$\begin{array}{r} \cdot \cdot 8 \\ \underline{321} \quad 8+1-3=6 \\ \underline{23} \quad 8+1-2=7 \\ 276 \end{array}$$

$$8). \quad D543_{16} - 69B_{16} = CEA8_{16}$$

$$\begin{array}{r} \cdot \cdot \cdot 16 \\ \underline{D543} \quad 16+3-B=16+3-11=8 \\ \underline{69B} \quad 16+3-9=10_{10}=A_{16} \\ CEA8 \quad 16+4-6=14_{10}=E_{16} \end{array}$$

### 3. Умножение.

Умножение многозначных чисел выполняется аналогично «в столбик». Умножение этим способом сводится к перемножению однозначных чисел и сложению.

#### Примеры.

$$1). \quad 53_8 \cdot 4_8 = 254_8$$

$$\begin{array}{r} \cdot 1 \\ \times 53 \quad 3 \cdot 4 = 12_{10} = 1 \cdot 8 + 4 = 14_8 \\ \underline{4} \quad 5 \cdot 4 + 1 = 21_{10} = 2 \cdot 8 + 5 = 25_8 \\ 254 \end{array}$$

$$5). \quad 15_{16} \cdot 6_{16} = 7E_{16}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 1 \\ \times 15 \quad 5 \cdot 6 = 30_{10} = 1 \cdot 16 + 14 = 1E_{16} \\ \underline{6} \quad 1 \cdot 6 + 1 = 7 \\ 7E \end{array}$$

$$2). \quad 175_8 \cdot 0,5_8 = 116,1_8$$

$$\begin{array}{r} \cdot 4 \cdot 3 \\ \times 175 \quad 5 \cdot 5 = 25_{10} = 3 \cdot 8 + 1 = 31_8 \\ \underline{0,5} \quad 7 \cdot 5 + 3 = 38_{10} = 4 \cdot 8 + 6 = 46_8 \\ 116,1 \quad 1 \cdot 5 + 4 = 9_{10} = 1 \cdot 8 + 1 = 11_8 \end{array}$$

$$6). \quad 149_{16} \cdot 89_{16} = B011_{16}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 149 \quad 9 \cdot 9 = 81_{10} = 5 \cdot 16 + 1 = 51_{16} \\ \times 89 \quad 4 \cdot 9 + 5 = 41_{10} = 2 \cdot 16 + 9 = 29_{16} \\ \underline{B91} \quad 1 \cdot 9 + 2 = 11_{10} = B_{16} \\ + \underline{A48} \quad 9 \cdot 8 = 72_{10} = 4 \cdot 16 + 8 = 48_{16} \\ B011 \quad 4 \cdot 8 + 4 = 36_{10} = 2 \cdot 16 + 4 = 24_{16} \\ \quad 1 \cdot 8 + 2 = 10_{10} = A_{16} \\ \quad 9 + 8 = 17_{10} = 1 \cdot 16 + 1 = 11_{16} \\ \quad 1 + B + 4 = 1 + 11 + 4 = 16_{10} = 1 \cdot 16 + 0 = 10_{16} \end{array}$$

$$3). \quad 24_8 \cdot 16_8 = 430_8$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \quad 4 \cdot 6 = 24_{10} = 3 \cdot 8 + 0 = 30_8 \end{array}$$

$$7). \quad 24E_{16} \cdot 12_{16} = 297C_{16}$$

$$\begin{array}{r} \times 24E \quad E \cdot 2 = 14 \cdot 2 = 28_{10} = 1 \cdot 16 + 12 = 1C_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{16} \\ + 170 \\ + 24 \\ \hline 4301 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \cdot 6 + 3 = 15_{10} = 1 \cdot 8 + 7 = 17_8 \\ 7 + 4 = 11_{10} = 1 \cdot 8 + 3 = 13_8 \\ 1 + 1 + 2 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{12} \\ + 49C \\ + 24E \\ \hline 297C \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \cdot 2 + 1 = 9 \\ 2 \cdot 2 = 4 \\ 9 + E = 9 + 14 = 23_{10} = 1 \cdot 16 + 7 = 17_{16} \\ 1 + 4 + 4 = 9 \end{array}$$

4).  $623_8 \cdot 41_8 = 31763_8$

$$\begin{array}{r} \times 623 \\ \times 41 \\ \hline 623 \\ + 3114 \\ \hline 31763 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \cdot 4 = 12_{10} = 1 \cdot 8 + 4 = 14_8 \\ 2 \cdot 4 + 1 = 9_{10} = 1 \cdot 8 + 1 = 11_8 \\ 6 \cdot 4 + 1 = 25_{10} = 3 \cdot 8 + 1 = 31_8 \end{array}$$

8).  $A,5_{16} \cdot 2, B_{16} = 1B, B7_{16}$

$$\begin{array}{r} \times A,5 \\ \times 2,B \\ \hline 717 \\ + 14A \\ \hline 1B, B7 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \cdot B = 5 \cdot 11 = 55_{10} = 3 \cdot 16 + 7 = 37_{16} \\ A \cdot B + 3 = 10 \cdot 11 + 3 = 113_{10} = 7 \cdot 16 + 1 = 71_{16} \\ 5 \cdot 2 = 10_{10} = A_{16} \\ A \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20_{10} = 1 \cdot 16 + 4 = 14_{16} \\ 1 + A = B \\ 7 + 4 = 11_{10} = B_{16} \end{array}$$

#### 4. Деление.

Деление многозначных чисел в любой позиционной системе выполняется тем же способом, что и в десятичной. При этом используются операции умножения и вычитания.

##### Примеры.

*Деление на однозначные числа*

1)  $52_8 : 3_8 = 16_8$

$$\begin{array}{r} \underline{52_8} \bigg| 3_8 \\ \underline{3} \quad \bigg| 16_8 \\ \underline{22} \\ \underline{22} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \cdot 3 = 3 \\ 6 \cdot 3 = 18_{10} = 2 \cdot 8 + 2 = 22_8 \end{array}$$

2)  $313_8 : 7_8 = 35_8$

$$\begin{array}{r} \underline{313_8} \bigg| 7_8 \\ \underline{25} \quad \bigg| 35_8 \\ \underline{43} \\ \underline{43} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7 \cdot 3 = 21_{10} = 2 \cdot 8 + 5 = 25_8 \\ 5 \cdot 7 = 35_{10} = 4 \cdot 8 + 3 = 35_8 \end{array}$$

3)  $334_{16} : A_{16} = 52_{16}$

$$\begin{array}{r} \underline{334_{16}} \bigg| A_{16} \\ \underline{32} \quad \bigg| 52_{16} \\ \underline{14} \\ \underline{14} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 \cdot A = 50_{10} = 3 \cdot 16 + 2 = 32_{16} \\ 2 \cdot A = 20_{10} = 1 \cdot 16 + 4 = 14_{16} \end{array}$$

*Деление на многозначные числа*

$$4) 250_8 : 16_8 = 14_8$$

$$\begin{array}{r|l} 250_8 & 16_8 \\ \hline 16 & 14_8 \\ \hline 70 & \\ - 70 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$4_8 \cdot 16_8 = 70_8$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 4 \\ \hline 70 \end{array}$$

$$6 \cdot 4 = 24_{10} = 3 \cdot 8 + 0 = 30_8$$

$$1 \cdot 4 + 3 = 7$$

$$5) 1552_8 : 23_8 = 56_8$$

$$\begin{array}{r|l} 1552_8 & 23_8 \\ \hline 137 & 56_8 \\ \hline 162 & \\ - 162 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$5_8 \cdot 23_8 = 137_8$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 23 \\ \hline 5 \\ \hline 137 \end{array}$$

$$3 \cdot 5 = 15_{10} = 1 \cdot 8 + 7 = 17_8$$

$$2 \cdot 5 + 1 = 11_{10} = 1 \cdot 8 + 3 = 13_8$$

$$6_8 \cdot 23_8 = 162_8$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 23 \\ \hline 6 \\ \hline 162 \end{array}$$

$$3 \cdot 6 = 18_{10} = 2 \cdot 8 + 2 = 22_8$$

$$2 \cdot 6 + 2 = 14_{10} = 1 \cdot 8 + 6 = 16_8$$

$$6) 5E8_{16} : 12_{16} = 54_{16}$$

$$\begin{array}{r|l} 5E8_{16} & 12_{16} \\ \hline 5A & 54_{16} \\ \hline 48 & \\ - 48 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$5_{16} \cdot 12_{16} = 5A_{16}$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ \hline 5 \\ \hline 5A \end{array}$$

$$2 \cdot 5 = 10_{10} = A_{16}$$

$$4_{16} \cdot 12_{16} = 48_{16}$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ \hline 4 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$7) 63C_{16} : 39_{16} = 1C_{16}$$

$$\begin{array}{r|l} 63C_{16} & 39_{16} \\ \hline 39 & 1C_{16} \\ \hline 2AC & \\ - 2AC & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$63_{16} - 39_{16} = 2A_{16}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 16 \\ - 63 \\ \hline 39 \\ \hline 2A \end{array}$$

$$16 + 3 - 9 = 10_{10} = A_{16}$$

$$C_{16} \cdot 39_{16} = 2AC_{16}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 39 \\ \hline \end{array}$$

$$9 \cdot C = 108_{10} = 6 \cdot 16 + 12 = 6C_{16}$$

$$\frac{C}{2AC} \quad 3 \cdot C + 6 = 42_{10} = 2 \cdot 16 + 10 = 2A_{16}$$

$$8) \quad 6EF5_{16} : 5F_{16} = 12B_{16}$$

$$\begin{array}{r|l} 6EF5_{16} & 5F_{16} \\ \hline 5F & 12B_{16} \\ \hline FF & \\ - BE & \\ \hline 415 & \\ - 415 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$6E_{16} - 5F_{16} = F_{16}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 16 \\ - 6E \quad 16 + E - F = 16 + 14 - 15 = 15_{10} = F_{16} \\ \hline 5F \\ \hline F \end{array}$$

$$2_{16} \cdot 5F_{16} = BE_{16}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 5F \quad F \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30_{10} = 1 \cdot 16 + 14 = 1E_{16} \\ \hline 2 \quad 5 \cdot 2 + 1 = 11_{10} = B_{16} \\ \hline BE \end{array}$$

$$FF_{16} - BE_{16} = 41_{16}$$

$$\begin{array}{r} FF \quad F - E = 15 - 14 = 1 \\ - BE \quad F - B = 15 - 11 = 4 \\ \hline 41 \end{array}$$

$$B_{16} \cdot 5F_{16} = 415_{16}$$

$$\begin{array}{r} A \\ F \cdot B = 15 \cdot 11 = 165_{10} = 10 \cdot 16 + 5 = A5_{16} \\ \hline B \quad 5 \cdot B + A = 5 \cdot 11 + 10 = 65_{10} = 4 \cdot 16 + 1 = 41_{16} \\ \hline 415 \end{array}$$

### Задания для самостоятельной работы

Отчет по практической работе представить в письменном виде с подробным описанием последовательности действий при выполнении заданий.

#### Задание.

Выполнить операции сложения, вычитания, умножения и деления над числами в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системе счисления по вариантам. Произвести проверку, выполнив эти действия в 10 с/с (перевести в 10 с/с исходные числа и результат каждого действия).

№ вариант а	P = 2	P = 2	P = 8	P = 8	P = 16	P = 16
1.	x=1110011 y=1011	x=11100111 y=1011	x=716 y=53	x=227 y=61	x=72A y=B5	x=41F y=53
2.	x=1000001 y=1110	x=10010101 y=1101	x=131 y=37	x=71157 y=77	x=3C 5 y=2F	x=ACD y=B5
3.	x=10100001 y=111	x=1110001 y=101	x=262 y=56	x=411 y=15	x=68A y=8A	x=48A y=7C
4.	x=1100011	x=11011001	x=217	x=350	x=88 F	x=CB3

	y=1010	y=1011	y=61	y=37	y=C5	y=5F
<b>5.</b>	x=110011 y=1001	x=1001101 y=1010	x=636 y=67	x=711 y=27	x=2C3 y=23	x=1D8 y=7A
<b>6.</b>	x=1010101 y=10001	x=1011101 y=10101	x=104 y=52	x=324 y=34	x=5B3 y=67	x=13C y=2D
<b>7.</b>	x=1100111 y=1101	x=10001011 y=10001	x=140 y=32	x=511 y=37	x=B62 y=D2	x=5A8 y=A8
<b>8.</b>	x=11001001 y=1001	x=1001110 y=100	x=622 y=37	x=254 y=36	x=50C y=63	x=4C3 y=5F
<b>9.</b>	x=1001010 y=101	x=11001100 y=111	x=32414 y=34	x=57602 y=62	x=45FCF y=E7	x=4EE2E y=76
<b>10.</b>	x=111001 y=110	x=11001101 y=101	x=206 y=24	x=145 y=23	x=72D y=E9	x=49A y=5E
<b>11.</b>	x=1100110 y=11000	x=1110011 y=110	x=366 y=57	x=771 y=57	x=4A3 y=7D	x=C3C y=F6
<b>12.</b>	x=101010 y=1001	x=10001111 y=1011	x=107 y=31	x=522 y=62	x=21E y=3B	x=5DC y=8C
<b>13.</b>	x=101001 y=100	x=1011010 y=110	x=106 y=22	x=521 y=37	x=78C y=95	x=92A y=F1
<b>14.</b>	x=11000101 y=1001	x=1110011 y=101	x=114 y=12	x=703 y=23	x=A89 y=C6	x=C8E y=D6
<b>15.</b>	x=1010101 y=10101	x=1011011 y=111	x=317 y=37	x=124 y=76	x=37A y=38	x=55E y=5F

### 3. Измерение информации

*Цель работы:* познакомиться с основными подходами к измерению информации и использовать их при решении задач.

*Порядок выполнения работы*

1. Познакомиться с системой единиц измерения количества информации.
2. Рассмотреть содержательный и алфавитный подходы к измерению информации.
3. Закрепить полученные навыки при решении задач.

#### 1. Единицы измерения количества информации

Минимальную порцию информации о каком-либо свойстве объекта принято называть битом (binary digit – двоичная цифра). **Бит** – единица измерения информации, представляющая собой выбор из двух равновероятных вариантов. Бит представляет собой обозначение одного двоичного разряда, способного, в зависимости от сделанного выбора, принимать значение 1 или 0.

Таблица степеней двойки показывает, сколько комбинаций можно закодировать с помощью некоторого количества бит:

<b>Количество бит</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>Количество комбинаций</b>	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

**Байт** – единица измерения информации, представляющая собой последовательность, состоящую из 8 бит: **1 байт = 2<sup>3</sup> бит = 8 бит**.

Каждый бит имеет определенное место внутри байта, которое называется **разрядом**. Разряды принято нумеровать справа налево. Например, третий бит в байте на самом деле находится в пятом разряде байта.

Для измерения больших объемов информации принято использовать производные единицы измерения, представленные в таблице:

<b>Название</b>	<b>Степень</b>	<b>Условное обозначение</b>
Килобайт	2 <sup>10</sup> (1024 байт)	Кбайт, KB
Мегабайт	2 <sup>20</sup> (1024 Кбайт)	Мбайт, MB
Гигабайт	2 <sup>30</sup> (1024 Мбайт)	Гбайт, GB
Терабайт	2 <sup>40</sup> (1024 Гбайт)	Тбайт, TB
Петабайт	2 <sup>50</sup> (1024 Тбайт)	Пбайт, PB
Эксабайт	2 <sup>60</sup> (1024 Пбайт)	Эбайт, EB
Зеттабайт	2 <sup>70</sup> (1024 Эбайт)	Збайт, ZB
Йоттабайт	2 <sup>80</sup> (1024 Збайт)	Йбайт, YB

## 2. Содержательный подход к измерению количества информации

Новые сведения о свойствах объектов окружающего нас мира содержат информацию для человека и, следовательно, пополняют его знания. При содержательном подходе возможна качественная оценка полученной информации, например, насколько она для нас полезна, важна или наоборот – вредна.

Неопределенность знания о некотором событии – это количество возможных результатов события (бросания монеты, кубика; вытаскивания жребия и пр.). Уменьшение неопределенности знания человека в 2 раза, несет для него **1 бит** информации.

Количество информации ( $I$ ) для событий с различными вероятностями определяется по формуле *К.Шеннона*:

$$I = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i$$

где  $N$  – количество возможных событий;  $p_i$  – вероятности отдельных событий.

Заметим, что сумма вероятностей равна 1.

Если события равновероятны, то количество информации ( $I$ ) определяется по формуле *Р.Хартли*:

$$I = \log_2 N \text{ или } 2^I = N$$

где  $N$  – количество равновероятных событий.

**Пример 1.** В барабане для розыгрыша лотереи находится 32 шара. Сколько информации содержит сообщение том, что выпал номер 17?

Решение. Поскольку вытаскивание любого из 32 шаров равновероятно, то количество информации об одном выпавшем номере находится из уравнения:  $2^I = 32$ . Так как  $32 = 2^5$ , то  $I = 5$  бит. (Ответ не зависит от того, какой именно выпал номер).

Ответ: 5 бит.

**Пример 2.** При угадывании целого числа в диапазоне от 1 до  $N$  было получено 8 бит информации. Чему равно  $N$ ?

Решение: Для того, чтобы найти число, достаточно решить уравнение  $N = 2^x$ , где  $x = 8$ . Поскольку  $2^8 = 256$ , то  $N = 256$ . Следовательно, при угадывании любого целого числа в диапазоне от 1 до 256 получаем 8 бит информации.

**Пример 3.** Бросается несимметричная четырёхгранная пирамида. Известно, что

$$p_1 = 0.5, p_2 = 0.25, p_3 = p_4 = 0.125$$

являются вероятностями выпадения граней пирамиды. Вычислить количество полученной информации о выпадении какой-то грани пирамиды.

Решение:

$$\begin{aligned} H &= -0.5 \cdot \log_2 0.5 - 0.25 \cdot \log_2 0.25 - 0.25 \cdot \log_2 0.125 = \\ &= 0.5 \cdot 2 + 0.375 \cdot 2 = 1.75 \text{ бит.} \end{aligned}$$

### 3. Алфавитный подход к измерению количества информации

**Алфавит** – множество символов, используемых при записи текста. Полное количество символов в алфавите называется **размером** (*мощностью*) алфавита.

Алфавитный подход позволяет определить количество информации в тексте. Данный подход является **объективным**, т.е. он не зависит от человека, воспринимающего текст.

Если допустить, что все символы алфавита встречаются в тексте с одинаковой частотой (равновероятно), то **мощность** ( $N$ ) алфавита вычисляется по формуле:

$$N = 2^i$$

где  $i$  – информационный вес одного символа в используемом алфавите.

Если весь текст состоит из  $K$  символов, то при алфавитном подходе размер содержащейся в нем информации равен:

$$I = K \cdot i$$

**Пример 4.** Племя “Обезьяны” пишет письма, пользуясь 32-символьным алфавитом. Племя “Слоны” пользуется 64-символьным алфавитом. Вожди племен обменялись письмами. Письмо племени “Обезьяны” содержало 90 символов, а письмо племени “Слоны” – 80 символов. Сравните объем информации, содержащейся в письмах.

Решение: Мощность алфавита племени “Обезьяны” равна 32, информационный вес одного символа алфавита  $\log_2 32 = 5$  бит. Количество информации в тексте, состоящем из 90 символов, равно  $90 \cdot \log_2 32 = 450$  бит.

Рассуждая аналогично про племя “Слоны”, получим:  $80 \cdot \log_2 64 = 480$  бит.

Следовательно, объем информации в письме вождя племени “Слоны” больше объема информации, которую передал в письме вождь племени “Обезьяны”.

**Пример 5.** Для регистрации на сайте пользователю требуется придумать пароль. Длина пароля – ровно 11 символов. В качестве символов используются десятичные цифры и 12 различных букв алфавита, причём все буквы используются в двух начертаниях: как строчные, так и заглавные (регистр буквы имеет значение).

Под хранение каждого такого пароля на компьютере отводится минимально возможное и одинаковое целое количество байтов, при этом используется посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством битов.

Определите объём памяти, который занимает хранение 60 паролей (пароль должен занимать ЦЕЛОЕ число байт).

**Решение.**

- 1) согласно условию, в пароле можно использовать 10 цифр (0...9) + 12 заглавных букв алфавита + 12 строчных букв, всего  $10+12+12=34$  символа;
- 2) для кодирования 34 символов нужно выделить 6 бит памяти (5 бит не хватает, они позволяют закодировать только  $2^5=32$  варианта);
- 3) для хранения всех 11 символов пароля нужно  $11 \cdot 6 = 66$  бит;
- 4) поскольку пароль должен занимать целое число байт, берем ближайшее большее (точнее, не меньшее) значение, которое кратно 8: это  $72 = 9 \cdot 8$ ; то есть один пароль занимает 9 байт;
- 5) следовательно, 60 паролей занимают  $9 \cdot 60 = 540$  байт.

**Ответ:** 540 байт.

**Пример 6.** В базе данных хранятся записи, содержащие информацию о студентах:  
<Фамилия> – 16 символов: русские буквы (первая прописная, остальные строчные);  
<Имя> – 12 символов: русские буквы (первая прописная, остальные строчные);  
<Отчество> – 16 символов: русские буквы (первая прописная, остальные строчные);  
<Год рождения> – числа от 1960 до 1997.

Каждое поле записывается с использованием минимально возможного количества бит. Определите минимальное (целое) количество байт, необходимое для кодирования одной записи, если буквы *e* и *ё* считаются совпадающими.

**Решение.**

- 1) итак, нужно определить минимально возможные размеры в битах для каждого из четырех полей и сложить их;
- 2) известно, что первые буквы имени, отчества и фамилии – всегда заглавные, поэтому можно хранить их в виде строчных и делать заглавными только при выводе на экран;
- 3) таким образом, для символьных полей достаточно использовать алфавит из 32 символов (русские строчные буквы, «e» и «ё» совпадают, пробелы не нужны);
- 4) для кодирования каждого символа 32-символьного алфавита нужно 5 бит ( $32=2^5$ ), поэтому для хранения имени, отчества и фамилии нужно  $(16+12+16)*5=220$  бит;
- 5) для года рождения есть 38 вариантов, поэтому для него нужно отвести 6 бит ( $2^6=64\geq 38$ );
- 6) таким образом, всего требуется 226 бита или 29 байт.

**Ответ:** 29 байт.

**Пример 7.** Текст содержит 150 страниц; на каждой странице – 40 строк, в каждой строке – 60 символов (для записи текста использовался 256-символьный алфавит). Каков объем информации в Мбайтах содержится в документе?

**Решение.** Мощность алфавита равна 256 символов, поэтому один символ несет 1 байт информации. Значит, страница содержит  $40 \cdot 60 = 2400$  байт информации. Объем всей информации в документе (в разных единицах):

$$2400 \cdot 150 = 360\,000 \text{ байт.}$$

$$360\,000/1024 = 351,6 \text{ Кбайт.}$$

$$351,6/1024 = 0,3 \text{ Мбайт.}$$

**Ответ:** 0,3 Мбайт.

**Пример 8.** Какова мощность алфавита, с помощью которого записано сообщение, содержащее 2048 символов (страница текста), если его объем составляет 1,25 Кбайта?

**Решение.** Переведем информационное сообщение в биты:

$$1,25 \cdot 1024 \cdot 8 = 10240 \text{ бит.}$$

Определим количество бит на один символ:

$$10240:2048=5 \text{ бит.}$$

По формуле для мощности алфавита определим количество символов в алфавите:

$$N=2^i=2^5=32 \text{ символа.}$$

**Ответ:** 32 символа.

### Задания для самостоятельной работы

#### Задание №1

Заполнить пропуски значениями, в соответствии с предложенными единицами измерения:

Вариант	Условие
1	5 Гбайт = ? Кбайт = ? бит; 512 Кбайт = $2^?$ байт = $2^?$ бит; 384 Мбайт = $(2^? + 2^?)$ байт = $(2^? + 2^?)$ бит.
2	? Гбайт = ? Кбайт = 12288 бит; 8 Пбайт = $2^?$ Гбайт = $2^?$ Кбайт; 768 Тбайт = $(2^? + 2^?)$ Мбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
3	? Гбайт = 7168 Мбайт = ? Кбайт; 256 Кбайт = $2^?$ байт = $2^?$ бит; 192 Тбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
4	? Гбайт = ? Мбайт = 2500 байт; 512 Гбайт = $2^?$ Кбайт = $2^?$ бит; 160 Тбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
5	? Тбайт = ? Мбайт = 700 000 000 бит; 0,5 Тбайт = $2^?$ Кбайт = $2^?$ бит; 288 Тбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
6	2 Гбайт = ? Кбайт = ? бит; 256 Мбайт = $2^?$ Кбайт = $2^?$ бит; 576 Тбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
7	5,5 Мбайт = ? Кбайт = ? бит; 1,5 Кбайт = $2^?$ байт = $2^?$ бит; 528 Гбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
8	? Кбайт = ? байт = 10 073 741 бит; 2,5 Мбайт = $2^?$ Кбайт = $2^?$ байт; 320 Гбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
9	? Гбайт = 15 Мбайт = ? бит; 3,5 Мбайт = $2^?$ байт = $2^?$ бит; 96 Гбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
10	? Тбайт = ? Мбайт = 1073741824 байт; 512 Гбайт = $2^?$ Мбайт = $2^?$ Кбайт; 80 Гбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
11	? Кбайт = ? байт = 1024 бит; 1024 Тбайт = $2^?$ Мбайт = $2^?$ Кбайт; 144 Гбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.
12	1,5 Гбайт = ? Мбайт = ? бит; 0,5 Гбайт = $2^?$ Кбайт = $2^?$ байт; 544 Гбайт = $(2^? + 2^?)$ Кбайт = $(2^? + 2^?)$ бит.

#### Задание №2

Вариант	Условие
1	Какое количество информации несет в себе сообщение о том, что нужный вам файл находится на одном из восьми дисков?
2	В рулетке общее количество лунок равно 128. Какое количество информации вы получите в сообщении об остановке шарика в одной

	из лунок.
3	Какое количество информации получит второй игрок при игре в крестики-нолики на поле 8x8 после первого хода первого игрока, играющего «крестиками»?
4	Сообщение о том, что ваш друг живет на десятом этаже, несет в себе 4 бита информации. Сколько может быть этажей в доме?
5	Какое количество информации получит второй игрок при игре в крестики-нолики на поле 4x4 после первого хода первого игрока?
6	При угадывании целого числа в некотором диапазоне было получено 6 бит информации. Сколько чисел содержит данный диапазон?
7	Сообщение о том, что Петя живет во втором подъезде, несет 3 бита информации. Сколько подъездов в доме?
8	Группа студентов пришла в бассейн, в котором 4 дорожки для плавания. Инструктор сообщил, что группа будет плавать на дорожке №3. Сколько информации получили студенты из этого сообщения?
9	В корзине лежат 8 шаров разного цвета. Сколько информации несет сообщение о том, что из корзины достали зеленый шар?
10	Было получено сообщение «Встречайте! Вагон №7». Известно, что в составе поезда 16 вагонов. Какое количество информации было получено?
11	Сообщение о том, что ваш друг живет на десятом этаже несет в себе 5 бит информации. Сколько может быть этажей в доме?
12	При угадывании целого числа в некотором диапазоне было получено 7 бит информации. Сколько чисел содержит данный диапазон?

### Задание №3

Вариант	Условие
1	Автомобильный номер длиной 6 символов составляется из заглавных букв (всего используется 12 букв) и десятичных цифр в любом порядке. Каждый символ кодируется одинаковым и минимально возможным количеством бит, а каждый номер – одинаковым и минимально возможным целым количеством байт. Определите объем памяти, необходимый для хранения 32 автомобильных номеров.
2	В базе данных хранятся записи, содержащие информацию о датах. Каждая запись содержит три поля: год (число от 1 до 2100), номер месяца (число от 1 до 12) и номер дня в месяце (число от 1 до 31). Каждое поле записывается отдельно от других полей с помощью минимально возможного числа бит. Определите минимальное количество бит, необходимых для кодирования одной записи.
3	Автомобильный номер длиной 10 символов составляется из заглавных букв (всего используется 21 буква) и десятичных цифр в любом порядке.

	Каждый символ кодируется одинаковым и минимально возможным количеством бит, а каждый номер – одинаковым и минимально возможным целым количеством байт. Определите объем памяти, необходимый для хранения 81 автомобильного номера.
4	Для регистрации на сайте пользователю необходимо придумать пароль длиной ровно 15 символов. В пароле можно использовать десятичные цифры и 31 различных символов алфавита, причем все буквы используются в двух начертаниях – строчные и прописные. Каждый символ кодируется одинаковым и минимально возможным количеством бит, а каждый пароль – одинаковым и минимально возможным целым количеством байт. Определите объем памяти, необходимый для хранения 80 паролей.
5	Автомобильный номер длиной 5 символов составляют из заглавных букв (задействовано 30 различных букв) и любых десятичных цифр в любом порядке. Каждый такой номер в компьютерной программе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит). Определите объем памяти, отводимый этой программой для записи 50 номеров.
6	При регистрации в системе каждому пользователю выдается пароль, состоящий из 11 символов и содержащий только символы И, К, Л, М, Н. Каждый такой пароль в компьютерной программе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит). Определите объем памяти, отводимый этой программой для записи 20 паролей.
7	При регистрации в системе каждому пользователю выдается пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы К, О, М, П, Б, Ю, Т, Е, Р. Каждый такой пароль записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит). Определите объем памяти, отводимый этой программой для записи 30 паролей.
8	При регистрации в системе каждому пользователю выдается пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы из 12-буквенного набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. В базе данных для хранения сведений о каждом пользователе отведено одинаковое и минимально возможное целое число байт. При этом используют посимвольное кодирование паролей, все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит. Кроме собственно пароля для каждого пользователя в системе хранятся дополнительные сведения, для чего отведено 12 байт. Определите объем памяти, необходимый для хранения сведений о 50 пользователях.
9	При регистрации в системе каждому пользователю выдается идентификатор, состоящий из 10 символов, первый и последний из которых – одна из 18 букв, а остальные – цифры (допускается использование 10 десятичных цифр). Каждый такой идентификатор в компьютерной программе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование; все цифры кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит, все буквы также кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит).

	Определите объём памяти, отводимый этой программой для записи 25 паролей.
10	При регистрации в системе каждому пользователю выдаётся пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы из набора И,Н,Ф,О,Р,М,А,Т,К. Каждый такой пароль в компьютерной программе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит). Определите объём памяти, отводимый этой программой для записи 25 паролей.
11	При регистрации в системе каждому пользователю выдаётся пароль, состоящий из 6 символов и содержащий только символы из 7-буквенного набора Н, О, Р, С, Т, У, Х. В базе данных для хранения сведений о каждом пользователе отведено одинаковое целое число байт, при этом для хранения сведений о 100 пользователях используется 1400 байт. Для каждого пользователя хранятся пароль и дополнительные сведения. Для хранения паролей используют посимвольное кодирование, все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит. Сколько бит отведено для хранения дополнительных сведений о каждом пользователе?
12	При регистрации в системе, используемой при проведении командной олимпиады, каждому ученику выдается уникальный идентификатор – целое число от 1 до 1000. Для хранения каждого идентификатора используется одинаковое и минимально возможное количество бит. Идентификатор команды состоит из последовательно записанных идентификаторов учеников и 8 дополнительных бит. Для записи каждого идентификатора команды система использует одинаковое и минимально возможное количество байт. Во всех командах равное количество участников. Сколько участников в каждой команде, если для хранения идентификаторов 20 команд-участниц потребовалось 180 байт?

#### Задание №4

Вариант	Условие
1	Сообщение содержит 1536 символов. Его объём 3 Кбайт. Какова мощность алфавита?
2	Для записи текста использовался 256-символьный алфавит. Каждая страница содержит 50 строк по 60 символов. Какой объём информации содержат 80 страниц текста?
3	Текст (использован 256-символьный алфавит), содержит 55 страниц; на каждой странице – 45 строк, в каждой строке – 62 символа. Каков объём информации в документе?
4	Какова мощность алфавита, с помощью которого записано сообщение, содержащее 1024 символов, если его объём составляет 1/512 Мбайта?
5	Для записи текста использовался 256-символьный алфавит. Каждая страницасодержит 65 строк по 55 символов. Какой объём информации содержат 110 страниц текста?
6	Сообщение содержит 768 символов. Его объём 1,5 Кбайт. Какова мощность алфавита?
7	Текст (использован 256-символьный алфавит), содержит 105 страниц;

	на каждой странице – 55 строк, в каждой строке – 40 символов. Каков объем информации в документе?
<b>8</b>	Какова мощность алфавита, с помощью которого записано сообщение, содержащее 2048 символов, если его объем составляет 1/512 Мбайта?
<b>9</b>	Текст (использован 256-символьный алфавит), содержит 120 страниц; на каждой странице – 60 строк, в каждой строке – 55 символа. Каков объем информации в документе?
<b>10</b>	Какова мощность алфавита, с помощью которого записано сообщение, содержащее 2048 символов, если его объем составляет 1/256 Мбайта?
<b>11</b>	Для записи текста использовался 256-символьный алфавит. Каждая страницасодержит 50 строк по 60 символов. Какой объем информации содержат 200 страниц текста?
<b>12</b>	Текст (использован 256-символьный алфавит), содержит 130 страниц; на каждой странице – 70 строк, в каждой строке – 55 символа. Каков объем информации в документе?

## 4. Логические основы ЭВМ

### Цель работы

Изучить:

- определения основных понятий (простое и сложное высказывания, логические операции, логические выражения, логическая функция);
- порядок выполнения логических операций;
- алгоритм построения таблиц истинности;
- схемы базовых логических элементов/

Научиться:

- строить таблицы истинности;
- строить логические схемы сложных выражений.

### Общие теоретические сведения

#### Основные понятия алгебры логики

Логической основой компьютера является алгебра логики, которая рассматривает логические операции над высказываниями.

**Алгебра логики** – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

**Логическое высказывание** – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Пример: «3 – простое число» является высказыванием, поскольку оно истинно.

Не всякое предложение является логическим высказыванием.

Пример: предложение «Давайте пойдем в кино» не является высказыванием. Вопросительные и побудительные предложения высказываниями не являются.

**Высказывательная форма** – это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

*Пример:* « $x+2>5$ » - высказывательная форма, которая при  $x>3$  является истинной, иначе ложной.

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения – является ли оно истинным или ложным. Слова и словосочетания «не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными (сложными)**. Высказывания, которые не являются составными, называются **элементарными (простыми)**.

Пример: высказывание «Число 6 делится на 2» - простое высказывание. Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - составное высказывание, образованное из двух простых с помощью логической связки «и».

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний, из которых они состоят.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают **имена**.

Пример: Обозначим через А простое высказывание «число 6 делится на 2», а через В простое высказывание «число 6 делится на 3». Тогда составное высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» можно записать как «А и В». Здесь «и» – логическая связка, А, В – логические переменные, которые могут принимать только два значения – «истина» или «ложь», обозначаемые, соответственно, «1» и «0».

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение (табл. 1).

Таблица 1. Основные логические операции

Обозначение операции	Читается	Название операции	Альтернативные обозначения
$\neg$	НЕ	Отрицание (инверсия)	Черта сверху
$\square$	И	Конъюнкция (логическое умножение)	$\cdot$ &
$\square$	ИЛИ	Дизъюнкция (логическое сложение)	+
$\rightarrow$	Если ... то	Импликация	$\square$
$\leftrightarrow$	Тогда и только тогда	Эквиваленция	$\sim$
XOR	Либо ...либо	Исключающее ИЛИ (сложение по модулю 2)	$\square$

**НЕ** Операция, выражаемая словом «не», называется **отрицанием** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком  $\neg$ ). Высказывание  $\neg A$  истинно, когда  $A$  ложно, и ложно, когда  $A$  истинно.

Пример. Пусть  $A$ =«Сегодня пасмурно», тогда  $\neg A$ =«Сегодня не пасмурно».

**И** Операция, выражаемая связкой «и», называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio – соединение) или логическим умножением и обозначается точкой « $\cdot$ » (может также обозначаться знаками  $\square$  или &). Высказывание  $A \cdot B$  истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания  $A$  и  $B$  истинны.

Пример. Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - истинно, а высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 больше 10» - ложно.

**ИЛИ** Операция, выражаемая связкой «или» (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. disjunctio – разделение) или логическим сложением и обозначается знаком  $\square$  (или плюсом). Высказывание  $A \square B$  ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания  $A$  и  $B$  ложны.

Пример. Высказывание «Число 6 делится на 2 или число 6 больше 10» - истинно, а высказывание «Число 6 делится на 5 или число 6 больше 10» - ложно.

**ЕСЛИ ... ТО** Операция, выражаемая связками «если ..., то», «из ... следует», «... влечет ...», называется **импликацией** (лат. implicatio – тесно связаны) и обозначается знаком  $\rightarrow$ . Высказывание  $A \rightarrow B$  ложно тогда и только тогда, когда  $A$  истинно, а  $B$  ложно.

Пример. Высказывание «если студент сдал все экзамены на «отлично», то он получит стипендию». Очевидно, эту импликацию следует признать ложной лишь в том случае, когда студент сдал на «отлично» все экзамены, но стипендии не получил. В остальных случаях, когда не все экзамены сданы на «отлично» и стипендия получена (например, в силу того, что студент проживает в малообеспеченной семье) либо когда экзамены вообще не сданы и о стипендии не может быть и речи, импликацию можно признать истинной.

**РАВНОСИЛЬНО** Операция, выражаемая связками «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «... равносильно ...», называется **эквиваленцией** или двойной импликацией и обозначается знаком  $\leftrightarrow$  или  $\sim$ . Высказывание  $A \leftrightarrow B$  истинно тогда и только тогда, когда значения  $A$  и  $B$  совпадают.

Пример. Высказывание «Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится без остатка на 2» является истинным, а высказывание «Число является нечетным тогда и только тогда, когда оно делится без остатка на 2» - ложно.

**ЛИБО ... ЛИБО** Операция, выражаемая связками «Либо ... либо», называется **исключающее ИЛИ** или сложением по модулю 2 и обозначается XOR или  $\square$ . Высказывание  $A \square B$  истинно тогда и только тогда, когда значения A и B не совпадают.

Пример. Высказывание «Число 6 либо нечетно либо делится без остатка на 2» является истинным, а высказывание «Либо число 6 четно либо число 6 делится на 3» – ложно, так как истинны оба высказывания входящие в него.

**Замечание.** Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B.$$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A).$$

Исключающее ИЛИ можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \text{ XOR } B = (\neg A \ \& \ B) \vee (\neg B \ \& \ A)$$

**Вывод.** Операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции достаточно, чтобы описывать и обрабатывать логические высказывания.

Порядок выполнения логических операций задается круглыми скобками. Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется операция отрицания («не»), затем конъюнкция («и»), после конъюнкции – дизъюнкция («или») и исключаящего или и в последнюю очередь – импликация и эквиваленция.

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой (логическим выражением).

**Логическая формула** - это символическая запись высказывания, состоящая из логических величин (констант или переменных), объединенных логическими операциями (связками).

**Логическая функция** - это функция логических переменных, которая может принимать только два значения: 0 или 1. В свою очередь, сама логическая переменная (аргумент логической функции) тоже может принимать только два значения: 0 или 1.

Пример.  $F(A, B) = A \ \& \ B \vee A$  – логическая функция двух переменных A и B.

Значения логической функции для разных сочетаний значений входных переменных – или, как это иначе называют, наборов входных переменных – обычно задаются специальной таблицей. Такая таблица называется **таблицей истинности**.

Приведем таблицу истинности основных логических операций (табл. 2)

Таблица 2.

A	B	$\neg A$	$A \ \& \ B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \text{ XOR } B$
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0

Опираясь на данные таблицы истинности основных логических операций можно составлять таблицы истинности для более сложных формул.

**Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:**

1. Определить количество строк:
  - количество строк =  $2^n$  + строка для заголовка,
  - n - количество простых высказываний.
2. Определить количество столбцов:
  - количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;
  - определить количество переменных (простых выражений);

– определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Пример 1. Составить таблицу истинности для формулы И–НЕ, которую можно записать так:  $\neg(A \& B)$ .

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: А и В, поэтому  $n=2$  и количество строк  $=2^2+1=5$ .

2. Определить количество столбцов:

Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и двух логических операций (1 инверсия, 1 конъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 4.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 3).

Таблица 3. Таблица истинности для логической операции  $\neg(A \& B)$

A	B	$A \& B$	$\neg(A \& B)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Подобным образом можно составить таблицу истинности для формулы ИЛИ–НЕ, которую можно записать так:  $\neg(A \vee B)$ .

Таблица 4. Таблица истинности для логической операции  $\neg(A \vee B)$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

**Примечание:** И–НЕ называют также «штрих Шеффера» (обозначают  $|$ ) или «антиконъюнкция»; ИЛИ–НЕ называют также «стрелка Пирса» (обозначают  $\downarrow$ ) или «антидизъюнкция».

Пример 2. Составить таблицу истинности логического выражения  $C = \neg A \& B \vee A \& \neg B$ .

Решение:

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: А и В, поэтому  $n=2$  и количество строк  $=2^2+1=5$ .

2. Определить количество столбцов:

Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и пяти логических операций (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 7.

Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 5).

Таблица 5. Таблица истинности для логической операции  $C = \neg A \& B \vee A \& \neg B$

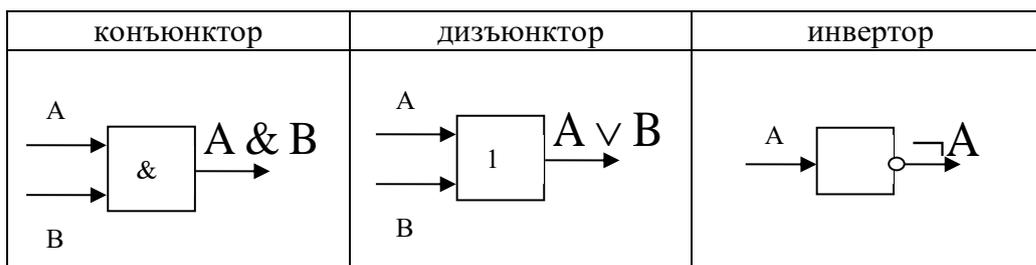
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \& B$	$A \& \neg B$	C
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

Логические формулы можно также представлять с помощью языка логических схем.

Существует три базовых логических элемента, которые реализуют три основные логические операции:

- логический элемент «И» – логическое умножение – конъюнктор;
- логический элемент «ИЛИ» – логическое сложение – дизъюнктор;
- логический элемент «НЕ» – инверсию – инвертор.



Поскольку любая логическая операция может быть представлена в виде комбинации трех основных, любые устройства компьютера, производящие обработку или хранение информации, могут быть собраны из базовых логических элементов, как из “кирпичиков”.

Логические элементы компьютера оперируют с сигналами, представляющими собой электрические импульсы. Есть импульс – логический смысл сигнала – 1, нет импульса – 0. На входы логического элемента поступают сигналы-значения аргументов, на выходе появляется сигнал-значение функции.

Преобразование сигнала логическим элементом задается таблицей состояний, которая фактически является таблицей истинности, соответствующей логической функции, только представлена в форме логических схем. В такой форме удобно изображать цепочки логических операций и производить их вычисления.

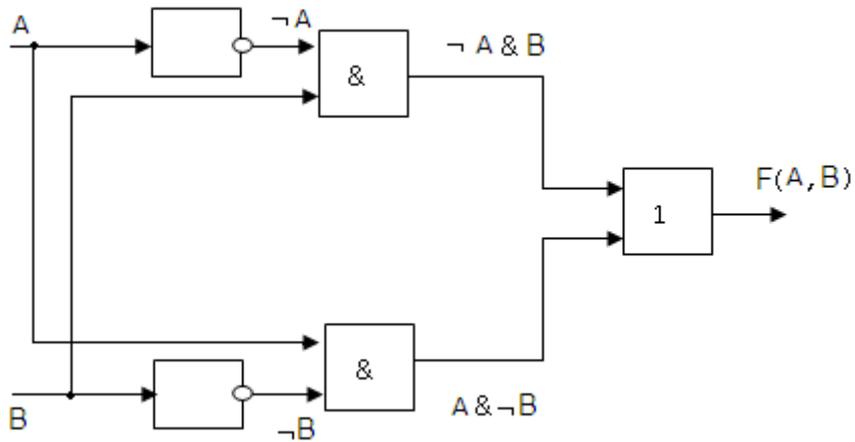
#### Алгоритм построения логических схем.

1. Определить число логических переменных.
2. Определить количество логических операций и их порядок.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей логический элемент.
4. Соединить логические элементы в порядке выполнения логических операций.

Пример. По заданной логической функции  $F(A, B) = \neg A \& B \vee A \& \neg B$  построить логическую схему.

Решение.

1. Число логических переменных = 2 (A и B).
2. Количество операций = 5 (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция). Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.
3. Схема будет содержать 2 инвертора, 2 конъюнктора и 1 дизъюнктор.
4. Построение надо начинать с логической операции, которая должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение, следовательно, на выходе должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые, в свою очередь, подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов).



### Задания для самостоятельной работы

1. Составить таблицу истинности логического выражения С.

Варианты задания:

№ варианта	С
1	$(\neg(A \& B)) \leftrightarrow (A \vee \neg B) \text{ XOR } A$
2	$(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \& B) \text{ XOR } B$
3	$(A \& B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \text{ XOR } A$
4	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \& \neg B) \text{ XOR } B$
5	$(A \vee B) \leftrightarrow \neg(A \& \neg B) \text{ XOR } B$
6	$\neg(A \& B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \text{ XOR } A$
7	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \text{ XOR } A$
8	$(\neg A \& B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow A) \text{ XOR } B$
9	$(A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(B \& A) \text{ XOR } A$
10	$(\neg B \& A) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B) \text{ XOR } B$
11	$(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (\neg B \& A) \text{ XOR } A$
12	$(\neg B \rightarrow \neg A) \leftrightarrow (A \vee B) \text{ XOR } B$
13	$\neg(B \vee A) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B) \text{ XOR } A$
14	$(\neg(A \& B)) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B) \text{ XOR } B$
15	$(\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \& A) \text{ XOR } B$
16	$(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (B \vee \neg A) \text{ XOR } A$

2. Построить логическую схему функции F(A,B).

Варианты задания:

№ варианта	F(A,B)
1	<del><math>(A \&amp; B) \vee \neg A</math></del>
2	<del><math>\neg(B \&amp; A) \&amp; \neg B</math></del>
3	<del><math>\neg(B \&amp; A)</math></del>
4	<del><math>\neg(B \&amp; A) \vee A</math></del>
5	<del><math>(\neg B) \vee \neg B</math></del>
6	<del><math>(\neg B) \vee \neg A</math></del>

7	$\neg(A \& \neg B) \vee A$
8	$(\neg \vee B) \wedge \neg A \vee B$
9	$(A \vee B) \wedge (\neg A) \wedge \neg B$
10	$\neg(\neg(B \vee \neg A) \wedge \neg B)$
11	$\neg(\neg(A \vee B)) \vee \neg A$
12	$\neg A \& \neg B \vee \neg A$
13	$\neg \vee B \wedge (\neg \vee A)$
14	$(A \& \neg B) \wedge \neg A \vee B$
15	$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
16	$\neg(A \& B) \wedge \neg A$

### Содержание отчета

1. Текст задания (с данными своего варианта).
2. Представление по каждому пункту задания подробного решения.

## 5. Алгоритм. Способы записи, основные типы алгоритмов.

### Краткие теоретические сведения

**Алгоритмом** называется точное предписание, определяющее последовательность действий исполнителя, направленных на решение поставленной задачи. В роли исполнителей алгоритмов могут выступать люди, роботы, компьютеры.

Понятие алгоритма в программировании является фундаментальным. Для алгоритма важен не только набор определенных действий, но и то, как они организованы, т.е. в каком порядке они выполняются.

Свойства алгоритма:

- **понятность** – все действия должны входить в систему команд исполнителя, т.е. быть понятны ему;
- **дискретность** - алгоритм делится на отдельные элементарные шаги;
- **определенность** - каждая команда однозначно определяет действие исполнителя;
- **конечность(результативность)** - алгоритм должен завершаться за конечное число шагов.
- **массовость** – алгоритм позволяет решать целый класс похожих задач.

### Способы записи алгоритма:

#### 1. Словесно-формульный

*Пример.*

Алгоритм деления обыкновенных дробей

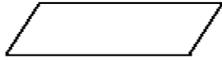
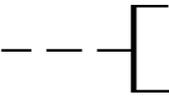
1. Числитель первой дроби умножить на знаменатель второй;
2. Знаменатель второй дроби умножить на числитель второй;
3. Записать дробь, числитель которой есть результат выполнения пункта 1, а знаменатель - результат выполнения пункта 2.

#### 2. Графический способ (в виде блок-схемы)

**Блок схема** – это графическое представление алгоритма при помощи стандартных обозначений. Блок схемы составляются в соответствии с ГОСТами. ГОСТы algo-

ритмов: ГОСТ 19.002-80, ГОСТ 19.003-80. На схемах алгоритмов выполняемые действия изображаются в виде отдельных блоков, которые соединяются между собой линиями связи в порядке выполнения действий. На линиях связи могут ставиться стрелки, причем, если направление связи *слева направо или сверху вниз*, то стрелки *не ставятся*. Блоки нумеруются. Внутри блока дается информация о выполняемых действиях.

Таблица 1 – Основные блоки, используемые при составлении алгоритмов

Название	Обозначение	Назначение
Пуск, Останов		Начало-конец алгоритма
Процесс		Любое вычислительное действие
Решение		Проверка условия
Модификатор		Цикл
Ввод-вывод		Ввод-вывод данных
Документ		Вывод на печатающее устройство
Соединитель		Используется на линиях разрыва
Комментарий		Комментарий

### 3. Запись алгоритма в виде последовательности команд для ЭВМ

Алгоритм, записанный на одном из языков программирования называется *программой*.

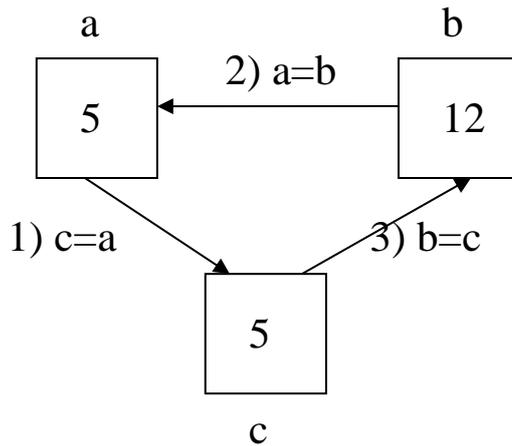
#### *Типы вычислительных процессов*

Вычислительные процессы могут быть: линейные, разветвляющиеся и циклические.

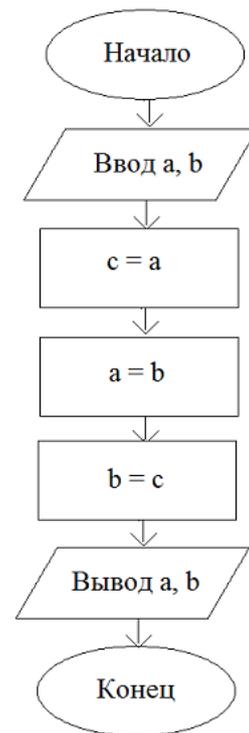
#### *Линейные алгоритмы*

Линейный алгоритм – алгоритм, в котором все команды выполняются последовательно друг за другом.

**Пример 1:** составить алгоритм обмена значений переменных a и b.

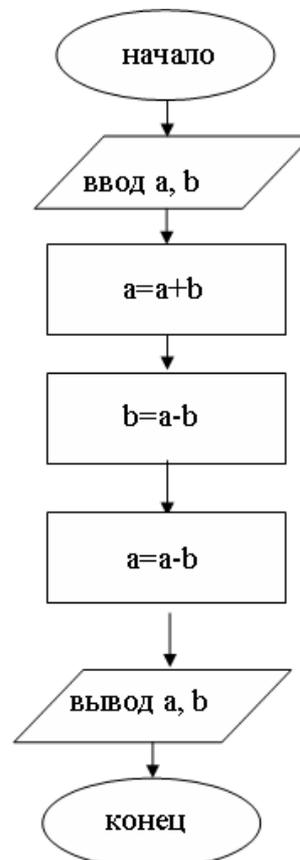


Команды	a	b	c
a=5, b=12	5	12	-
c=a	5	12	5
a=b	12	12	5
b=c	12	5	5



**Пример 2:** Составить алгоритм обмена значений переменных a и b без использования дополнительной переменной.

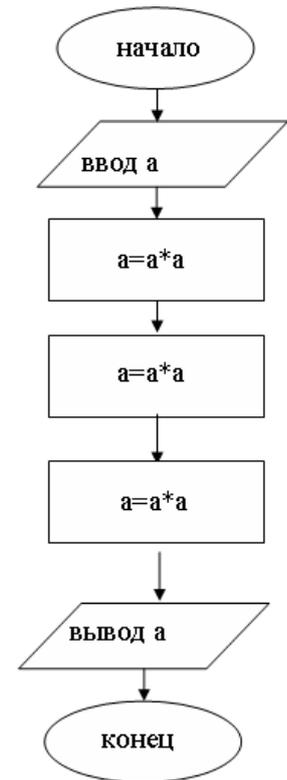
Команды	a	b
a=3, b=7	3	7
a=a+b	10	7
b=a-b	10	3
a=a-b	7	3



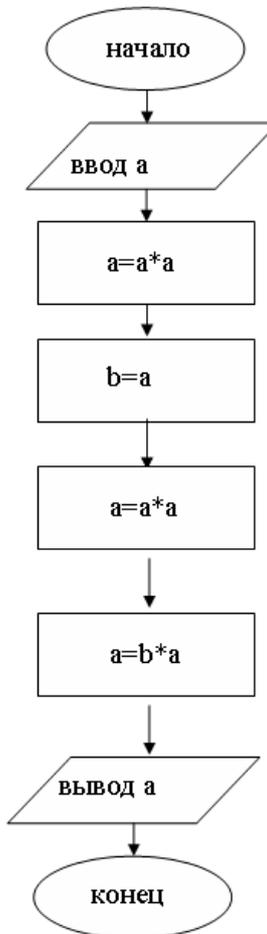
**Пример 2:** составить алгоритм вычисления  $a^8$ , используя не более 3х действий умножения (возведение в степень не использовать)

а: 2 -> 4 -> 16 -> 256  
 $a = a * a \mid a^2$   
 $a = a * a \mid a^4$   
 $a = a * a \mid a^8$

Команды	a
$a=2$	2
$a=a*a$	4
$a=a*a$	16
$a=a*a$	256



**Пример 3:** Составить алгоритм вычисления  $a^6$ , используя не более трех команд умножения.

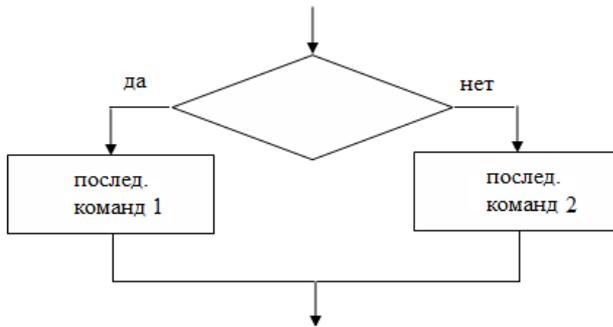


Команды	a	b
$a=2$	2	-
$a=a*a$	$2^2$	-
$b=a$	$2^2$	$2^2$
$a=a*a$	$2^4$	$2^2$
$a=b*a$	$2^6$	$2^2$

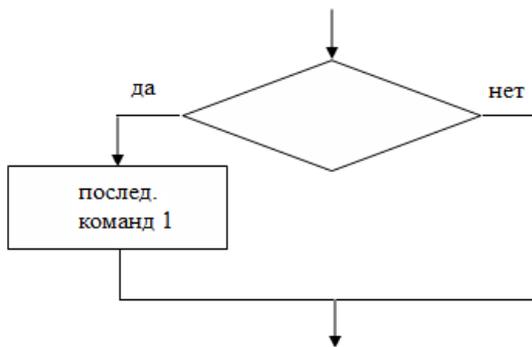
### Алгоритмы с ветвлением

Часто при выполнении алгоритма должны предлагаться различные действия в зависимости от выполнения или невыполнения некоторого условия. Такие алгоритмические структуры называют ветвлением.

### Полное ветвление



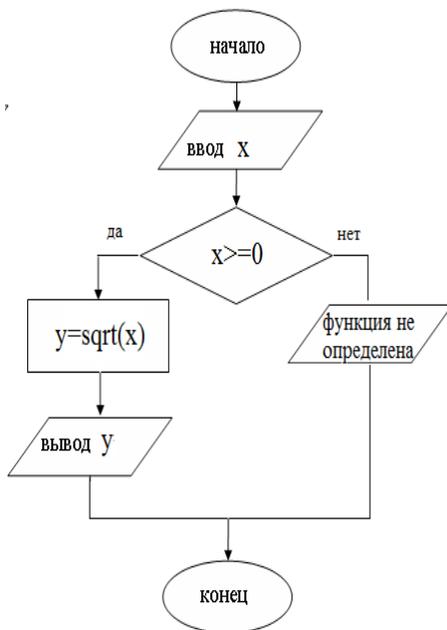
### Неполное ветвление



**Пример 4.** Вычислить выражение  $y = \sqrt{x}$  для введенного  $x$ .

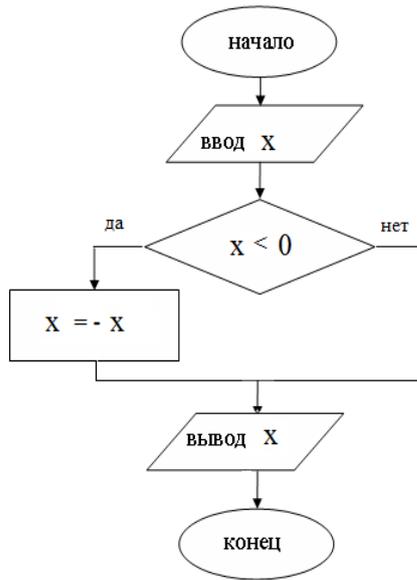
Исходные данные:  $x$ .

Результат:  $y$ , или 'функция не определена'



проверяемый случай	$x \geq 0$	$y$	результат
$x=9$	$9 \geq 0$ да	$y = \sqrt{9} = \pm 3$	$y = \pm 3$
$x=-9$	$-9 \geq 0$ нет	-	функция не определена

**Пример 5.** Вычислить выражение  $y = |x|$  для введенного  $x$ .



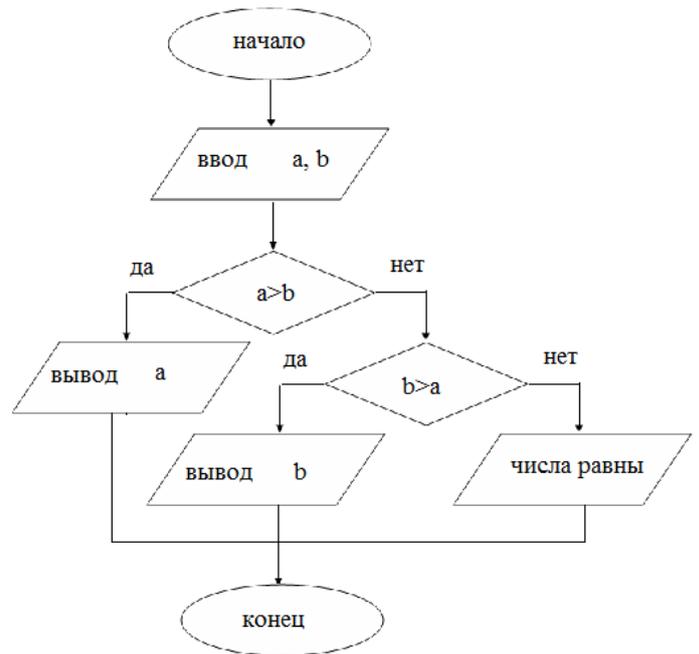
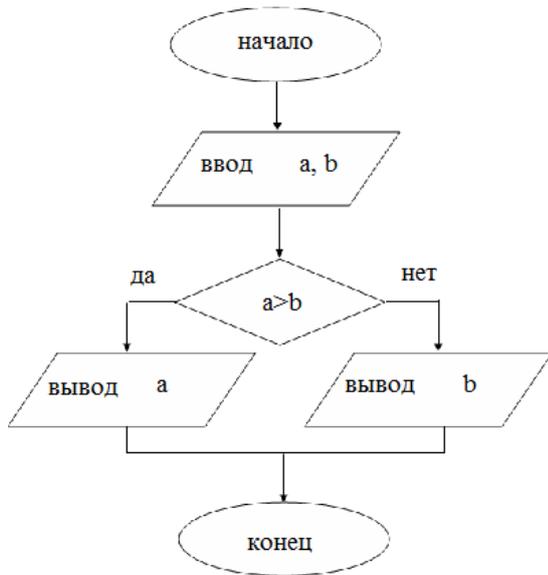
проверяемый случай	$x \geq 0$	$y$	результат
$x=9$	$9 \geq 0$ да	$y = \sqrt{9} = \pm 3$	$y = \pm 3$
$x=-9$	$-9 \geq 0$ нет	-	функция не определена

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

**Пример 6.** Выбрать максимальное из 2х чисел  $a$  и  $b$ .

1 вариант

2 вариант

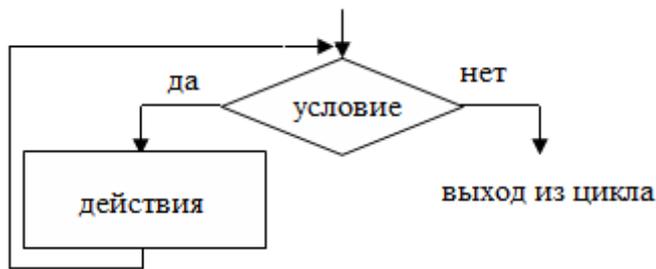


проверяемый случай	$x$	$y$	результат
$a=9$ $b=15$	$9 > 15$ нет	$15 > 9$ да	15
$a=18$ $b=3$	$18 > 3$ да	-	18
$a=7$ $b=7$	$7 > 7$ нет	$7 > 7$ нет	числа равны

## Алгоритмы с циклами

Цикл – многократное повторение одних и тех же действий.

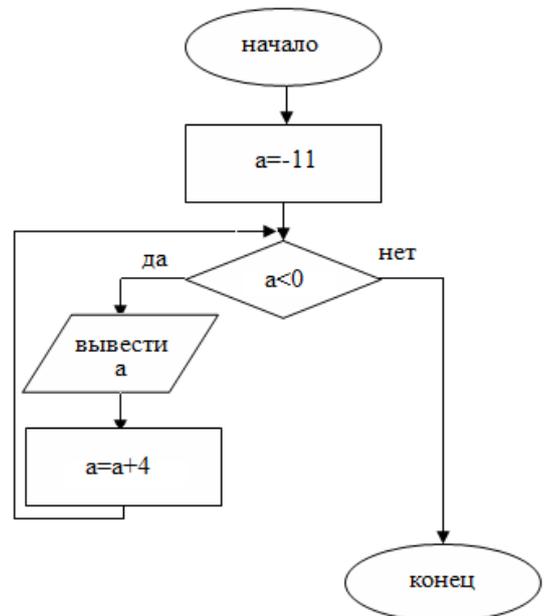
### 1. Цикл с предусловием



Такой цикл называют «пока». Механизм его работы: пока условие истинно, повторять...

**Пример 7.** Вывести все отрицательные члены арифметической прогрессии  $-11; -7...$

Пусть  $a$  – очередной член прогрессии.  
 $a = a_1 + 4$  – следующий член прогрессии.  
 Пока  $a < 0$ , повторять  $a = a_1 + 4$ .



Цикл с предусловием может не выполниться ни разу, если условие сразу оказалось ложным.

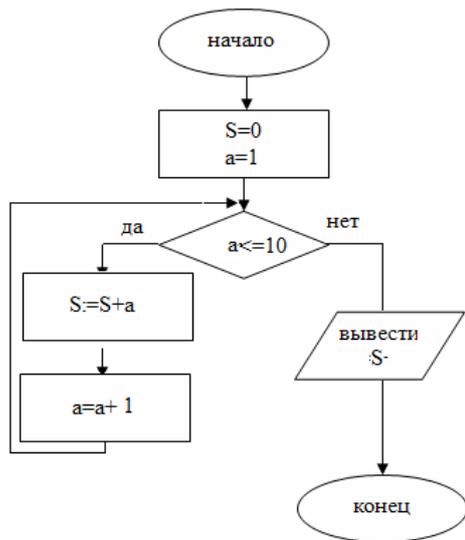
**Пример 9.** Найти сумму первых десяти натуральных чисел.

$$S = 1 + 2 + \dots + 10$$

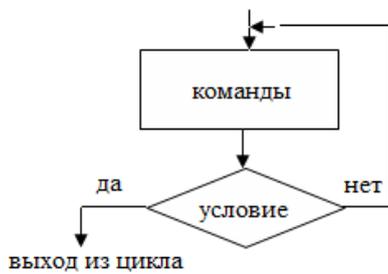
$S$  – сумма

$a$  – очередное слагаемое.

$S := S + a$ $a := a + 1$	Выполнять, пока $a \leq 10$
------------------------------	-----------------------------

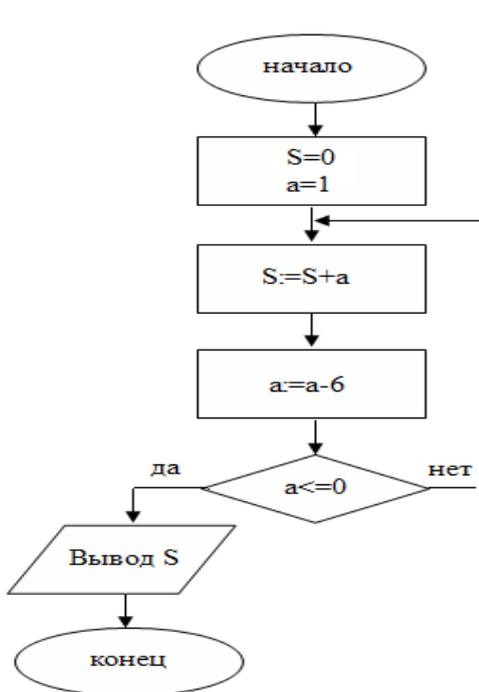


## 2. Цикл с постусловием.



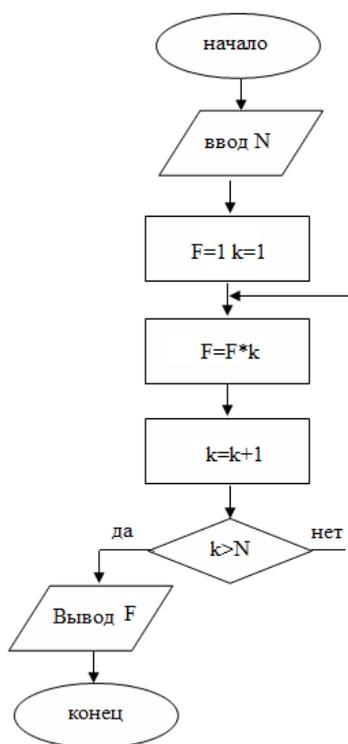
Механизм работы: повторять, пока условие не станет истинным.  
Этот цикл всегда выполняется хотя бы 1 раз.

**Пример 9.** Найти сумму положительных членов арифметической прогрессии: 17;  
11 ...



$S=a+S$ $a:=a-6$	тело цикла повторять до тех пор, пока не выполнится условие $a \leq 0$
---------------------	---

**Пример 10. Вычислить  $n!$**



$F=F*k$ $k=k+1$	тело цикла повторять до тех пор, пока не выполнится условие $k>N$
--------------------	--

**Задания для самостоятельной работы**

Вариант	Номера заданий
1	1а, 1ж, 1н, 2а
2	1б, 1з, 1о, 2б
3	1в, 1и, 1п, 2в
4	1г, 1к, 1р, 2г
5	1д, 1л, 1с, 2д
6	1е, 1м, 1т, 2е
7	1а, 1и, 1р, 2ж
8	1б, 1к, 1с, 2з
9	1в, 1л, 1т, 2б
10	1г, 1м, 1н, 2в
11	1д, 1ж, 1о, 2г
12	1е, 1з, 1п, 2д
13	1а, 1и, 1р, 2е
14	1б, 1к, 1с, 2ж

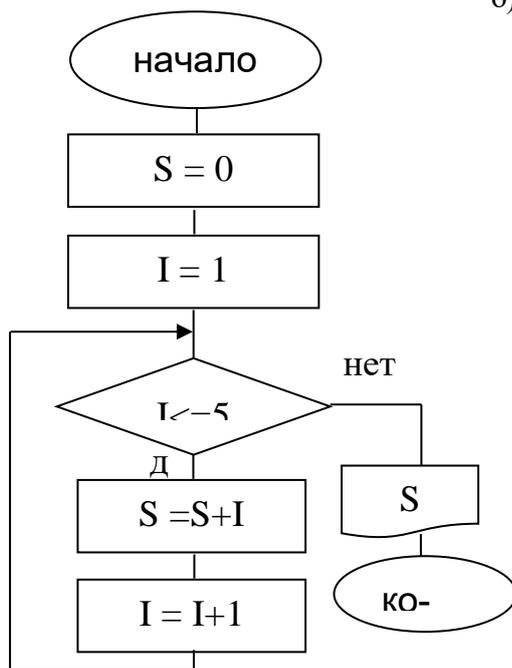
**1. Составить блок-схему алгоритма решения задачи:**

- а) По длине ребра куба найти площадь грани, площадь полной поверхности и объем куба.
- б) Найти площадь кольца с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ .
- в) Вычислить площадь треугольника по трем сторонам (по формуле Герона).
- г) Вычислить площадь параллелограмма по двум сторонам и углу между ними, заданному в градусах.
- д) Вычисление суммы цифр введенного натурального двухзначного числа.

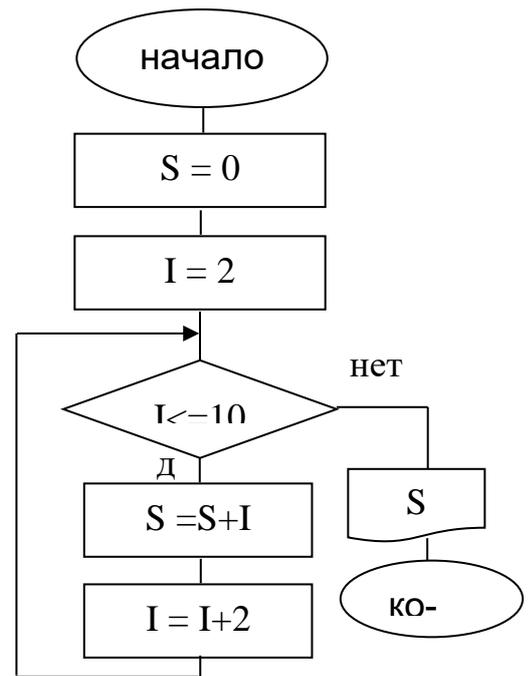
- е) По координатам трёх вершин некоторого треугольника найти его площадь и периметр.
- ж) Вводятся X и Y. Если X больше Y, то произвести их обмен.
- з) Из чисел A, B, C, D выбрать максимальное.
- и) Введено четырехзначное число. Найти количество четных цифр.
- к) Введено трехзначное число. Найти сумму четных цифр.
- л) Введено четырехзначное число. Найти среднее арифметическое нечетных цифр.
- м) Определить, существует ли треугольник с заданными сторонами a, b, c.
- н) Найти сумму делителей числа n.
- о) Найти сумму  $1 + 1/3 + 1/5 + \dots (N \text{ слагаемых})$ .
- п) Подсчитать сумму двухзначных чисел, сумма цифр которых не превышает 7.
- р) Задана арифметическая прогрессия 2; 5; ... . Определите наименьшее количество членов прогрессии, начиная с первого, сумма которых превышает 50.
- с) Вывести таблицу значений функции  $y = \sin^2 x - \cos x$  на интервале  $[-\pi, \pi]$  с шагом  $\pi/10$ .
- т) Найти сумму:  $S = x + 2x + 3x + \dots (n \text{ слагаемых})$

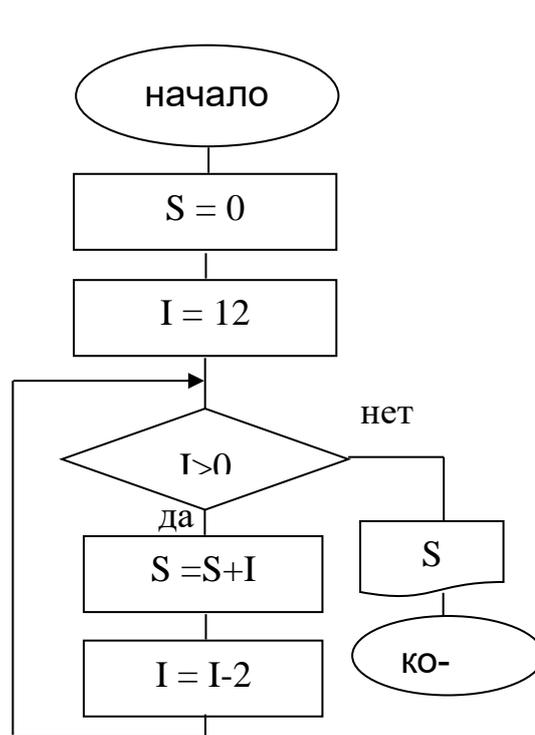
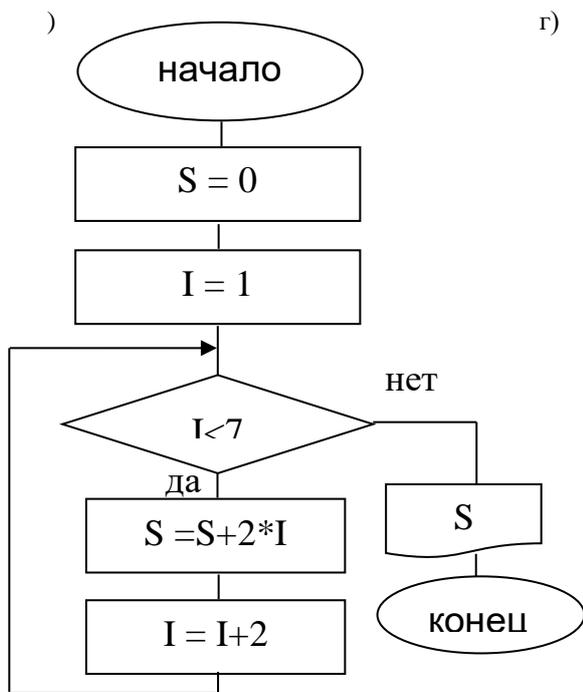
**2. Выполнить ручную трассировку и определить результат выполнения алгоритма**

а)

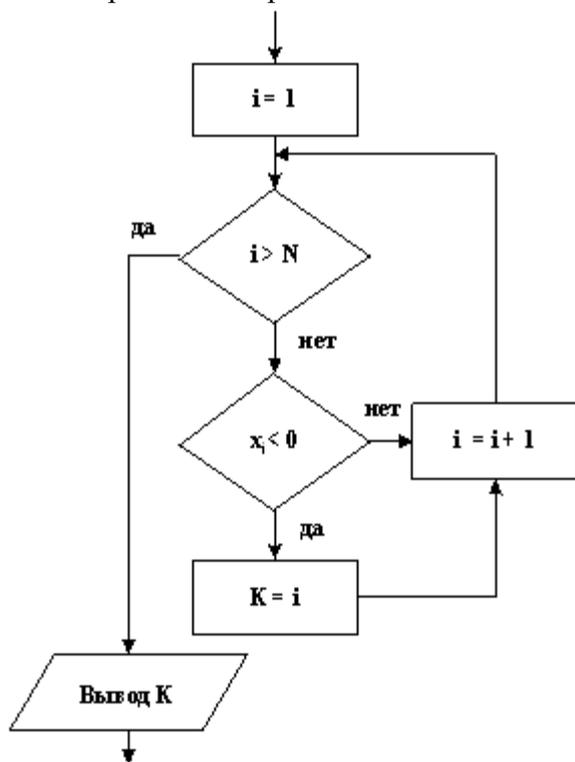


б)

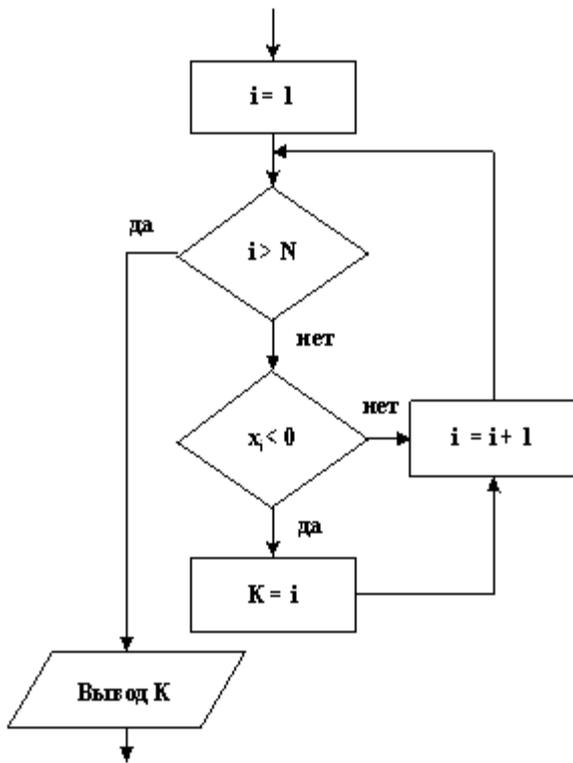




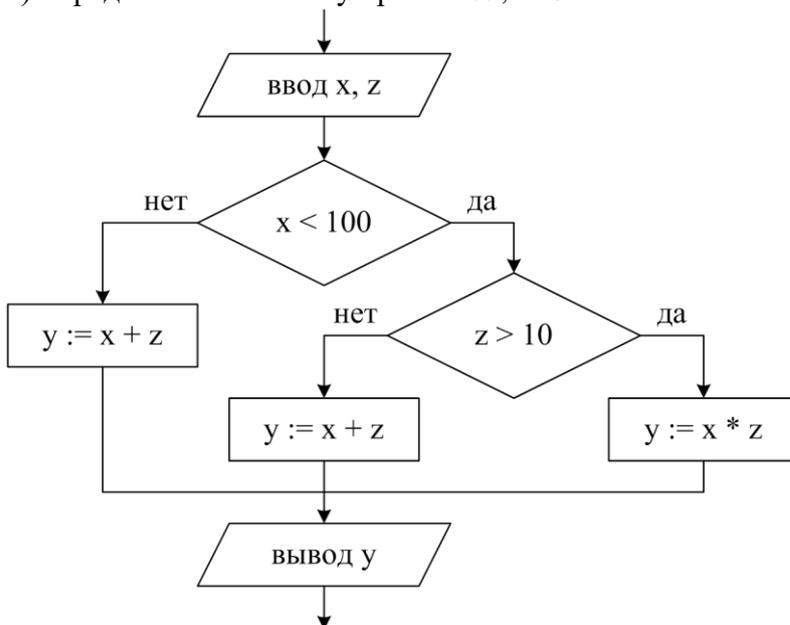
Е) Для массива  $X = (-8, 9, 10, -2, 4, -5, 3, 2)$  найти значение переменной, которая является результатом работы алгоритма



Ж) Для массива  $X = (8, 0, -10, -8, 4, -9, -3, 7)$  найти значение переменной, которая является результатом работы алгоритма



3) определить значение  $y$  при  $x=105, z=8$



## 6. Машина Поста. Машина Тьюринга

Машина Поста – это абстрактная (несуществующая реально) вычислительная машина, созданная для уточнения (формализации) понятия алгоритма. Представляет собой универсальный исполнитель, позволяющий вводить начальные данные и читать результат выполнения программы.

В 1936 г. американский математик Эмиль Пост в статье описал систему, обладающую алгоритмической простотой и способную определять, является ли та или иная задача алгоритмически разрешимой. Если задача имеет алгоритмическое решение, то она представима в форме команд для машины Поста.

Машина Поста состоит из:

- бесконечной ленты, поделенной на одинаковые ячейки (секции). Ячейка может быть пустой (0 или пустота) или содержать метку (1 или любой другой знак),
- головки (каретки), способной передвигаться по ленте на одну ячейку в ту или иную сторону, а также способной проверять наличие метки, стирать и записывать метку.

Текущее состояние машины Поста описывается состоянием ленты и положением каретки. Состояние ленты – информация о том, какие секции пусты, а какие отмечены. Шаг – это движение каретки на одну ячейку влево или вправо. Состояние ленты может изменяться в процессе выполнения программы.

Кареткой управляет программа, состоящая из строк команд. Каждая команда имеет следующий синтаксис:

$i K j$ ,

где  $i$  - номер команды,  $K$  – действие каретки,  $j$  - номер следующей команды (отсылка).

Всего для машины Поста существует шесть типов команд:

$V j$  - поставить метку, перейти к  $j$ -й строке программы.

$X j$  - стереть метку, перейти к  $j$ -й строке программы.

$< j$  - сдвинуться влево, перейти к  $j$ -й строке программы.

$> j$  - сдвинуться вправо, перейти к  $j$ -й строке программы.

$? j_1; j_2$  - если в ячейке нет метки, то перейти к  $j_1$ -й строке программы, иначе перейти к  $j_2$ -й строке программы.

! – конец программы (стоп).

У команды «стоп» отсылки нет.

Варианты окончания выполнения программы на машине Поста:

- Команда "стоп" - корректная остановка. Возникает в результате выполнения правильно написанного алгоритма.
- Выполнение недопустимой команды – нерезультативная остановка. Случаи, когда головка должна записать метку там, где она уже есть, или стереть метку там, где ее нет, являются аварийными (недопустимыми).
- Уход в бесконечность, закливание. Машина Поста в результате работы алгоритма может вообще не остановиться (никогда не дойти до команды «стоп» и никогда не завершиться аварийной ситуацией).

Элементарные действия (команды) машина Поста проще команд машины Тьюринга. Поэтому программы для машины Поста имеют большее число команд, чем аналогичные программы для машины Тьюринга.

Почему достаточно лишь два различных символа (есть метка, нет метки)? Дело в том, что любой алфавит может быть закодирован двумя знаками; в зависимости от алфавита возрастать может только количество двоичных символов в букве алфавита.

Пример работы машины Поста: увеличить число 3 на единицу (изменить значение в памяти с 3 на 4).

Целое положительное число на ленте машины Поста представимо идущими подряд метками, которых на одну больше, чем кодируемое число. Это связано с тем, что одна метка обозначает ноль, а уже две – единицу, и т.д.

Допустим, точно известно, что каретка стоит где-то слева от меток и обозревает пустую ячейку. Тогда программа увеличения числа на единицу может выглядеть так:

1 -> 2  
2 ? 1;3  
3 <- 4  
4 V 5  
5 !

### **Задания для самостоятельного выполнения**

#### **Задача 1.**

Машина Поста состоит из ленты, разбитой на ячейки, и каретки, которая может считать содержимое обозреваемой ячейки, стирать метки и ставить метки. Создайте компьютерную модель машины Поста, вычитающей два числа.

#### **Задача 2.**

Напишите компьютерную программу, моделирующую машину Поста, которая увеличивает целое число на 2.

#### **Задача 3.**

Напишите компьютерную программу, моделирующую машину Поста, которая уменьшает целое число на 2.

#### **Задача 4.**

Напишите компьютерную программу, моделирующую машину Поста, которая складывает два целых числа.

#### **Задача 5.**

Напишите компьютерную программу, моделирующую машину Поста, которая умножает целое число на 2.

#### **Задача 6.**

Напишите программу для МП, складывающую два целых числа, заданных набором единиц.